

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE  
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
À L'OBTENTION DE LA  
MAÎTRISE EN GÉNIE MÉCANIQUE  
M.Eng.

PAR  
Adil FAHSI

APPLICATION DES TECHNIQUES DE FIABILITÉ POUR L'ESTIMATION DES  
INCERTITUDES DES RÉSULTATS DE SIMULATIONS NUMÉRIQUES EN  
HYDRODYNAMIQUE DES RIVIÈRES

MONTREAL, LE 1ER DÉCEMBRE 2009

© Fahsi Adil, 2009

**PRÉSENTATION DU JURY**  
**CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ**  
**PAR UN JURY COMPOSÉ DE**

M. Azzeddine Soulaïmani, directeur de mémoire  
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

M. Stéphane Hallé, président du jury  
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

M. Georges W. Tchamen, membre du jury  
Barrages et Hydraulique, Hydro-Québec

M. Tung T. Quach, membre du jury  
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

**IL A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC**

**LE 1ER DÉCEMBRE 2009**

**À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE**

## **REMERCIEMENTS**

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire ont été réalisés au sein du Groupe de Recherche sur les Applications Numériques en Ingénierie et en Technologie (GRANIT) de l'École de technologie supérieure.

Je souhaite tout d'abord remercier mon directeur de mémoire et encadrant M. Azzeddine Soulaïmani, pour m'avoir permis de réaliser ces travaux dans les meilleures conditions, mais aussi pour ses riches conseils et enseignements scientifiques, pour sa disponibilité permanente en particulier lors la relecture fastidieuse du mémoire, pour sa franchise à toute épreuve et pour toutes les discussions enrichissantes que nous avons pue avoir.

J'exprime ma reconnaissance envers les membres du jury, M. Stéphane Hallé, M. Georges W. Tchamen et M. Tung T. Quach, d'avoir accepté d'évaluer mes travaux.

Je remercie également M. Douglas Sparks de l'Unité Barrages et Hydraulique d'Hydro-Québec, pour les données et les informations qu'il a pue me fournir.

# **APPLICATION DES TECHNIQUES DE FIABILITÉ POUR L'ESTIMATION DES INCERTITUDES DES RÉSULTATS DE SIMULATIONS NUMÉRIQUES EN HYDRODYNAMIQUE DES RIVIÈRES**

Adil FAHSI

## **RÉSUMÉ**

Dans le domaine de l'ingénierie hydraulique, la prise en compte de la variabilité des paramètres de l'écoulement est devenue incontournable dans une démarche de conception robuste. La simulation de Monte Carlo reste l'outil le plus fiable pour la détermination de la probabilité de défaillance. Elle reste cependant très coûteuse surtout pour les systèmes complexes comportant des modèles éléments finis de grandes tailles et ayant de nombreux paramètres de conception incertains. D'autre part, l'utilisation des méthodes économiques basées sur l'indice de fiabilité nécessite l'évaluation du gradient et de la hessienne de la fonction d'état limite (Rackwitz-Fiessler, Newton). Ce travail se situe dans le cadre d'un couplage entre les simulations numériques en hydrodynamique des rivières et les méthodes fiabilistes basées sur l'indice de fiabilité. Une méthode probabiliste performante en termes de temps de calculs et de précision est développée en combinant l'algorithme quasi-Newton (BFGS) et les méthodes fiabilistes FORM et tirage d'importance.

La méthode proposée a été mise en œuvre et appliquée à des écoulements réels, la rivière de l'Aisne en France et le bassin de Saint-Timothée sur le bras nord du fleuve Saint-Laurent. Les résultats obtenus, en particulier l'intervalle de confiance à 95% de la ligne d'eau et la probabilité de dépassement de la hauteur d'une digue de protection, ont été comparés avec succès aux résultats de référence utilisant la simulation Monte Carlo. Ils ont permis de mettre en évidence la robustesse et l'efficacité de la méthodologie proposée et ont contribué à la compréhension de la défaillance en déterminant l'influence des paramètres incertains introduits à l'exercice de modélisation.

# **APPLICATION OF RELIABILITY TECHNIQUES FOR THE ESTIMATION OF UNCERTAINTIES IN FLUVIAL HYDRAULICS SIMULATIONS**

Adil FAHSI

## **ABSTRACT**

In hydraulic engineering, the physical properties governing the flow are known up to some degree of uncertainties. It is thus important for a safe and optimal design of hydraulic structures to evaluate the uncertainties propagation through the system from the input to the output data. The Monte Carlo simulation is the simplest and direct method to evaluate the probability of safety or failure; however, for very small probabilities such evaluation can prove very prohibitive. On the other-hand, approximate reliability methods such as FORM rely on the solution of an optimization problem. For fast and robust convergence, gradient-based iterative methods are the methods of choice. In this paper we present a coupling of a quasi-Newton algorithm with the FORM and Importance sampling reliability methods to evaluate small probabilities of failure. These techniques are applied in the cases of a flow in the Aisne river (France) and the Saint Lawrence river, where we consider the friction coefficient, the discharge and the bathymetry parameters as the uncertain variables. The 95% confidence interval for the water elevation and the probability of exceeding the height of a protective dyke are then obtained.

## TABLE DES MATIÈRES

	Page
INTRODUCTION .....	1
CHAPITRE 1 APPROCHES USUELLES EN MÉCANIQUE .....	3
1.1 Modélisation hydrodynamique et incertitudes .....	3
1.1.1 Incertitude dans les paramètres d'un modèle .....	3
1.1.2 Incertitudes liées à la structure d'un modèle .....	4
1.1.3 Incertitudes dans la résolution numérique des équations d'un modèle .....	4
1.2 Prise en compte des incertitudes .....	5
1.2.1 Modèles statiques .....	5
1.2.2 Modèles dynamiques stochastique-probabilistes .....	5
1.3 Planification de modèles stochastique-probabilistes .....	6
1.3.1 Élaboration de modèle .....	6
1.3.2 Acquisition des données .....	6
1.3.3 Analyse de sensibilité .....	7
1.3.4 Description mathématique des incertitudes .....	7
1.3.5 Calcul, évaluation et interprétation des résultats .....	8
1.4 Principales approches pour tenir compte des incertitudes .....	9
1.4.1 Méthodes à base de simulations .....	9
1.4.2 Méthodes approchées .....	11
1.4.3 Méthodes par développement stochastique .....	12
1.4.4 Méthodes par surface de réponse .....	14
1.5 Codes de calculs probabilistes .....	14
1.6 Objectifs du mémoire .....	15
1.7 Plan du mémoire .....	16
CHAPITRE 2 DÉFINITIONS DU CALCUL EN FIABILITÉ .....	17
2.1 Nature du problème et définitions .....	17
2.1.1 Variables de base .....	17
2.1.2 Fonction d'état limite .....	18
2.1.3 Probabilité de défaillance .....	18
2.1.4 Transformation isoprobabiliste .....	19
2.1.5 Point de conception .....	19
2.1.6 Indice de fiabilité .....	20
2.1.7 Algorithmes d'optimisation de Rackwitz-Fiessler pour la détermination de $\beta_{HL}$ (HLRF) .....	21
2.2 Méthode de simulation directe (Monte Carlo) .....	22
2.3 Méthodes basées sur l'indice de fiabilité .....	25
2.3.1 Méthode FORM .....	25
2.3.2 Méthode de tirage d'importance (Melchers, 1989) .....	28
2.4 Facteurs d'importance en fiabilité .....	29
2.5 Validation et comparaison des différentes méthodes sur un cas académique .....	30

2.5.1	Introduction.....	30
2.5.2	Influence de la courbure.....	31
2.5.3	Relation entre la courbure et le nombre de simulations dans la méthode de tirage d'importance .....	34
2.6	Conclusion .....	36
CHAPITRE 3 COUPLAGE FIABILITÉ ET ÉLÉMENTS FINIS OU VOLUMES FINIS .....		37
3.1	Problématique .....	37
3.2	Le modèle hydraulique unidimensionnel : Mascaret .....	41
3.3	Le logiciel de simulation probabiliste : Nessus .....	43
CHAPITRE 4 AMÉLIORATION DE PERFORMANCES DES ALGORITHMES PROBABILISTES .....		45
4.1	Introduction.....	45
4.2	Algorithme quasi-Newton (BFGS).....	46
4.2.1	Résumé de l'algorithme .....	49
4.3	Comparaison de la méthode proposée BFGS avec des méthodes antérieures et le logiciel fiabiliste Nessus .....	50
4.3.1	Conclusion sur la comparaison .....	56
4.4	Remarques et perspectives .....	56
CHAPITRE 5 APPLICATIONS À DES ÉCOULEMENTS HYDRAULIQUES RÉELS .....		57
5.1	Introduction.....	57
5.2	Application au bassin de l'Aisne .....	57
5.2.1	Modèle stochastique.....	58
5.2.1.1	Variables aléatoires .....	59
5.2.1.2	Mode de défaillance .....	62
5.2.2	Résultats de l'analyse de fiabilité .....	64
5.2.2.1	Analyse de sensibilité .....	66
5.3	Application au bassin de Saint-Timothée .....	67
5.3.1	Le modèle numérique du bassin de Saint-Timothée.....	69
5.3.1.1	Description géométrique .....	69
5.3.1.2	Condition frontière aval .....	70
5.3.2	Variables aléatoire retenues et mode de défaillance .....	71
5.3.3	Résultats de l'analyse de fiabilité .....	74
5.3.3.1	Critère du dimensionnement .....	77
5.3.4	Influence de la corrélation .....	80
5.4	Remarques et perspectives .....	82
CONCLUSION.....		83
ANNEXE 1 SOURCES D'INCERTITUDES (Tekatlian, 2001).....		86
BIBLIOGRAPHIE .....		87

## LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau 1.1	Codes de calculs probabilistes et les auteurs (Pellissetti et Schuëller, 2006) .....15
Tableau 4.1	Caractéristiques des variables aléatoires d'entrée.....52
Tableau 4.2	Nombre de calculs de la fonction d'état limite obtenus par différentes méthodes et pour différents seuils $h_0$ .....52
Tableau 4.3	Probabilité de défaillance obtenue par différentes méthodes et pour différents seuils $h_0$ .....53
Tableau 4.4	Probabilité de défaillance obtenue par différentes méthodes et pour différents seuils $h_0$ .....55
Tableau 5.1	Tableau récapitulatif des incertitudes des données géométriques (Tekatlian, 2001).....61
Tableau 5.2	Tarage aval au bassin de l'Aisne .....63
Tableau 5.3	Description des variables aléatoires d'entrée.....64
Tableau 5.4	Intervalle de confiance à 95 % pour la ligne d'eau moyenne .....65
Tableau 5.5	Tarage aval au bassin de Saint-Timothée .....70
Tableau 5.6	Description des variables aléatoires d'entrée.....74
Tableau 5.7	Probabilité de défaillance.....75
Tableau 5.8	Niveaux de probabilité de défaillance acceptés par secteurs industriels (Dehmous, 2007).....77
Tableau 5.9	Modèle avec incertitudes. Point de conception et probabilité de défaillance .....78
Tableau 5.10	Analyse hydrologique .....78



## LISTE DES FIGURES

		Page
Figure 1.1	<i>Allure générale d'une densité de probabilité et principales quantités d'intérêt (Lemaire, 2008) .....</i>	7
Figure 1.2	<i>Représentation des densités de Gauss, log-normale, uniforme et de Weibull de mêmes moyennes et écarts-types. (Lemaire, 2008) .....</i>	8
Figure 2.1	<i>Illustration de la simulation de Monté Carlo. ....</i>	23
Figure 2.2	<i>Définition de l'indice de fiabilité et de l'approximation FORM. ....</i>	25
Figure 2.3	<i>Cas des minimums locaux. ....</i>	26
Figure 2.4	<i>Déformation du domaine au voisinage du point de conception. ....</i>	28
Figure 2.5	<i>Évolution des méthodes probabilistes, cas <math>a = 10^{-1}</math> .....</i>	32
Figure 2.6	<i>Évolution des méthodes probabilistes, cas <math>a = 10^{-2}</math> .....</i>	33
Figure 2.7	<i>Évolution des méthodes probabilistes, cas <math>a = 10^{-3}</math> .....</i>	33
Figure 2.8	<i>Évolution de tirage d'importance en fonction du nombre de simulations réalisées au voisinage du point de conception, cas <math>a = 10^{-3}</math> .....</i>	34
Figure 2.9	<i>Évolution de tirage d'importance en fonction du nombre de simulations réalisées au voisinage du point de conception, cas <math>a = 10^{-2}</math> . ....</i>	35
Figure 2.10	<i>Évolution de tirage d'importance en fonction du nombre de simulations réalisées au voisinage du point de conception, cas <math>a = 10^{-1}</math> .....</i>	35
Figure 3.1	<i>Organigramme d'un couplage direct.....</i>	38
Figure 3.2	<i>Représentation d'un cours d'eau par un modèle unidimensionnel. Tirée de Roux (2004, p. 64) .....</i>	41
Figure 3.3	<i>Représentation schématique des lits mineur, moyen et majeur. Tirée de Hostach (2006, p. 122) .....</i>	42
Figure 3.4	<i>Couplage Nessus – Code de volumes finis.....</i>	44

Figure 4.1	<i>Profil en long du canal et profils de la surface libre pour différents débits. ....</i>	51
Figure 4.2	<i>Profils du nombre de Froude pour différents débits. ....</i>	51
Figure 4.3	<i>Convergence de l'indice de fiabilité <math>\beta</math> et de la fonction état limite (BFGS, <math>h_0 = 0.40</math> m). ....</i>	53
Figure 4.4	<i>Fonction d'état limite, cas de deux minimums. ....</i>	54
Figure 5.1	<i>Rivière de l'Aisne. ....</i>	58
Figure 5.2	<i>Profil longitudinal du fond du bassin étudié. ....</i>	61
Figure 5.3	<i>Exemple d'une section originale du bassin et son interpolation linéaire. ....</i>	62
Figure 5.4	<i>La ligne d'eau moyenne et les lignes d'eau seuil (MC). ....</i>	65
Figure 5.5	<i>Hiérarchisation des sources d'incertitudes (FORM, <math>P_f = 0.025</math>). ....</i>	66
Figure 5.6	<i>Valeurs moyennes des sensibilités (FORM, <math>P_f = 0.025</math>). ....</i>	67
Figure 5.7	<i>Vue satellitaire du bassin de Saint-Timothée. ....</i>	68
Figure 5.8	<i>Positionnement des sections pour l'étude 1D et du mur de protection. ....</i>	70
Figure 5.9	<i>Profil longitudinal du fond du bassin de Saint-Timothée. ....</i>	73
Figure 5.10	<i>Exemple d'une section réelle du bassin et son interpolation linéaire. ....</i>	73
Figure 5.11	<i>Comparaison du temps CPU consommé en minutes par chaque méthode pour une probabilité <math>P_f \approx 10^{-3}</math>. ....</i>	76
Figure 5.12	<i>Diagramme des cosinus directeurs. ....</i>	76
Figure 5.13	<i>Influence de la corrélation des variables <math>Q</math> et <math>n</math>. ....</i>	81

## LISTE DES ABRÉVIATIONS, SIGLES ET ACRONYMES

$U_i$	Variable aléatoire dans l'espace standardisé
$u_i$	Réalisation de la variable aléatoire $U_i$
$u$	Vecteur des variables aléatoires dans l'espace standardisé
$Z_i$	Variable aléatoire dans l'espace physique
$z_i$	Réalisation de la variable aléatoire $Z_i$
$z$	Vecteur des variables aléatoires dans l'espace physique
$( )^T$	Transposée d'une matrice ou d'un vecteur
$B$	Matrice hessienne du problème d'optimisation
$Cov(.,.)$	Covariance de deux variables aléatoires
$f_{Z_i}(z_i)$	Densité de probabilité de la variable aléatoire $Z_i$
$f_{Z_1, \dots, Z_n}(z_1, \dots, z_n)$	Densité conjointe de probabilité du vecteur aléatoire $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$
$F_{Z_i}(z_i)$	Fonction de répartition de $Z_i$
$H(u)$	Fonction d'état limite dans l'espace standardisé
$G(z)$	Fonction d'état limite dans l'espace physique
$Q$	Débit
$n$	Coefficient de Manning
$I$	Matrice unité
$I_D$	Fonction indicatrice sur le domaine $D$
$D_f$	Domaine de défaillance

$D_s$	Domaine de sécurité
$k$	Numéro de l'itération de l'algorithme probabiliste
$nb$	Nombre de variables aléatoires
$N$	Nombre de simulations
$N_{def}$	Nombre de simulations conduisant à la défaillance
$P_f$	Probabilité de défaillance
$p(z_1, z_2, \dots, z_n)$	Densité de tirage
$u^*$	Point de conception ou point de défaillance le plus probable
$T$	Transformation iso probabiliste
$\beta$	Indice de fiabilité
$\beta_c$	Indice de fiabilité de Cornell
$\beta_{HL}$	Indice de fiabilité d'Hasofer-Lind
FORM	First Order Reliability Method
IS	Importance Sampling
SORM	Second Order Reliability Method
$\alpha$	Vecteur des cosinus directeurs
$\delta z_i$	Incrément de la variable $Z_i$ pour le calcul par différences finies
$\delta u_i$	Incrément de la variable $U_i$ pour le calcul par différences finies
$\nabla G$	Gradient de la fonction $G$
$\nabla H$	Gradient de la fonction $H$
$\nabla^2 H$	Matrice hessienne de la fonction $H$

$c_v$	Coefficient de variation
$\varepsilon_H$	Précision sur la valeur de la fonction d'état limite
$\varepsilon_u$	Précision sur la distance entre deux points successifs de l'algorithme probabiliste
$\mu_{Z_i}$	Moyenne de la variable aléatoire $Z_i$
$\sigma_{Z_i}$	Écart-type de la variable aléatoire $Z_i$
$\varphi(.)$	Densité de probabilité de la loi normale centrée réduite
$\Phi(.)$	Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite
$\rho_{ij}$	Coefficient de corrélation de deux variables aléatoires
$\delta_{ij}$	Symbole de Kronecker

## INTRODUCTION

L'utilisation des techniques probabilistes dans l'évaluation des incertitudes est bien établie dans la pratique courante en calcul de structures lorsqu'il s'agit d'analyser les critères de sécurité et ou l'évaluation de la performance de systèmes structuraux complexes (ponts, bâtiments, moteurs...) (Ellingwood, 2006; Nikolaidis et al., 2005; De Rocquiny et al., 2008; Magne et Vasseur, 2006). Cependant, en modélisation hydrodynamique, l'utilisation de ces techniques est récente et encore restreinte (Tung et Yen, 2005; Merwade et al., 2008). Il est connu que les principaux paramètres d'une démarche de modélisation hydraulique comportent une certaine incertitude qui affecte le résultat final de l'exercice. Dans la plupart des décisions d'ingénierie qui sont basées sur les résultats de modélisation hydraulique, la pratique courante pour prendre en compte ces incertitudes consiste à majorer ou minorer les résultats dans le sens de recommander une solution sécuritaire. Dans le domaine de la protection contre les inondations, l'US Army Corps of Engineers (National Research Council, 2000) recommandait l'addition de 3 pieds au dessus de la crête des digues de protection. Pour la confection des cartes d'inondation dans le cadre des études de rupture de barrage et digue en France, il est recommandé d'ajouter 1 m aux niveaux maximaux et de retrancher 15 minutes aux temps d'arrivée d'ondes fournis par les modèles hydrauliques (ICOLD, 1998). À Hydro-Québec, les résultats des modélisations unidimensionnelles de rupture sont majorés en multipliant la profondeur d'eau par 1.15 (Joannette et al., 2001). Le but visé par ces majorations est de compenser dans le sens sécuritaire pour toutes les incertitudes associées à l'exercice de modélisation. En pratique, il a été réalisé que de telles corrections n'atteignent pas toujours le but visé d'une protection plus sécuritaire. Dépendant des caractéristiques topographiques des vallées et des crues qui les traversent, ou de l'occupation du territoire, les solutions majorées peuvent s'avérer insuffisantes ou moins sécuritaires que prévu. Dans une vallée ayant une topographie étalée et qui est densément peuplée, l'ajout de 1 mètre sur les niveaux maximaux, peut doubler la zone d'évacuation des populations. L'évacuation d'un trop grand nombre de personnes sur un territoire restreint peut engendrer d'autres catastrophes ou d'autres risques dus à l'engorgement des structures et voies d'évacuation.

Dans la modélisation hydraulique des écoulements de surface, le modèle mathématique de Saint-Venant est le plus utilisé pour représenter les écoulements en rivière et dans les canaux, de même que les écoulements d'inondations et ceux des zones côtières. La solution du modèle de Saint-Venant passe généralement par les techniques d'éléments finis ou de volumes finis. Ces modèles utilisent comme paramètres d'entrée, les débits et niveaux aux frontières, la bathymétrie et la topographie sous forme de modèle de terrain, ainsi que les coefficients de frottement. Tous ces paramètres sont entachés d'incertitudes dues à la variabilité naturelle des grandeurs physiques qu'ils représentent ou à l'imperfection de la connaissance exacte de leur valeur. Il existe également une incertitude liée à l'écart existant entre le modèle mathématique et la réalité que ce modèle est sensé représenter. Les méthodes fiabilistes basées sur les techniques probabilistes offrent une façon d'évaluer l'ampleur de l'incertitude liée aux résultats des modélisations en fonction des incertitudes associées aux paramètres et au modèle. Ces méthodes fiabilistes peuvent également fournir les probabilités de défaillance (ou de dépassement) des diverses solutions des modèles numériques. La méthode de Monte-Carlo constitue l'algorithme de référence de ces méthodes. Elle nécessite généralement le couplage de grand nombre de tirages selon chacun des paramètres avec le passage d'un calcul du modèle numérique de Saint-Venant sur le domaine à l'étude. Les modèles numériques de Saint-Venant les plus performants nécessitent, pour un scénario, un temps de calcul de l'ordre de quelques minutes à plusieurs heures selon l'importance du domaine à représenter, la finesse du maillage et la période à simuler. Le couplage de tels modèles avec un nombre élevé de tirages, quelques milliers à plusieurs millions, se traduit en une augmentation exponentielle du temps nécessaire à une analyse de Monte Carlo avec un modèle de Saint-Venant. La mise en place de méthodes alternatives à Monte Carlo, notamment les méthodes FORM ou SORM (First Order Reliability Method and Second Order Reliability Method) (Der Kiureghian et Taylor, 1983; Lemaire et al., 2005) trouve dans l'argument de réduction de temps de simulation toute sa justification.

## CHAPITRE 1

### APPROCHES USUELLES EN MÉCANIQUE

#### 1.1 Modélisation hydrodynamique et incertitudes

Les ouvrages hydrauliques (par exemple : barrages, digues de protection, etc.) sont généralement dimensionnés sur la base d'une estimation de risque. À cet effet, la probabilité de défaillance tolérable de l'ouvrage est confrontée au besoin sécuritaire. Plus le besoin de sécurité est élevé, plus rarement une défaillance de l'ouvrage peut être tolérée. La défaillance d'un ouvrage peut être définie comme un état dont la charge (extérieure) dépasse la capacité (intérieure) de l'ouvrage. La conception est réalisée aujourd'hui sur la base de résultats de modélisations numériques et des décisions financièrement importantes sont prises sans connaissance des incertitudes (De Rocquigny et al., 2008). Les incertitudes non prises en compte peuvent conduire à une solution non adéquate ou à des solutions peu optimales par rapport aux coûts et à l'efficacité des mesures. C'est pourquoi il est judicieux et nécessaire de déterminer les effets des incertitudes.

Les incertitudes peuvent être classées dans les catégories suivantes :

- Les incertitudes dans les paramètres du modèle;
- Les incertitudes dans la structure du modèle;
- Les incertitudes dans la résolution numérique des équations du modèle.

Les paragraphes suivants reprennent en détail ces différentes catégories d'incertitudes (Kreikenbaum et al., 2004).

##### 1.1.1 Incertitude dans les paramètres d'un modèle

Les incertitudes dans les paramètres d'un modèle sont liées aux imprécisions et aux erreurs dans la mesure et l'acquisition des paramètres et variables du modèle (Magne et Vasseur,



2006). Ce type d'incertitudes ne peut être évité, puisque des imprécisions se produisent à chaque relevé d'information et à chaque mesure. L'ordre de grandeur des imprécisions dépend de la méthode de mesure. Les incertitudes dans les paramètres d'un modèle sont relativement simples à déterminer.

### **1.1.2 Incertitudes liées à la structure d'un modèle**

Les incertitudes dans la structure modélisée comprennent (Kreikenbaum et al., 2004) :

- a) les incertitudes dans la prise en compte des variables les plus importantes et des processus;
- b) les incertitudes dans les formulations des processus.

Ces incertitudes sont bien plus difficiles à déterminer que les incertitudes liées aux paramètres du modèle. La seule possibilité d'évaluer l'ordre de grandeur des erreurs liées à la structure du modèle consiste à comparer entre eux les modèles et les logiciels. En hydrodynamique des rivières, les incertitudes se rapportant à la structure d'un modèle sont liées avant tout à la simplification et à l'idéalisation du système réel par un système abstrait (modélisation hydraulique unidimensionnelle) et à la formulation des processus significatifs dans les équations mathématiques (Roux, 2004; Hostache, 2006). Le point a) mentionné ci-dessus indique clairement que les incertitudes dans la structure d'un modèle sont liées aux incertitudes dans les paramètres du modèle.

### **1.1.3 Incertitudes dans la résolution numérique des équations d'un modèle**

La résolution des équations d'un modèle se fait normalement de manière numérique car une résolution analytique ne s'avère possible que dans des cas très spéciaux. L'incertitude des résultats dans la résolution des équations d'un modèle numérique est normalement négligeable par rapport aux autres sources d'incertitude (Roux, 2004; Hostache, 2006), et contrôlable par raffinement du maillage, du pas de temps etc.

## **1.2 Prise en compte des incertitudes**

Les incertitudes dans les paramètres, à savoir les débits et niveaux aux frontières, la bathymétrie et la topographie sous forme de modèle de terrain, ainsi que les coefficients de frottement, sont prises en compte de manières diverses. Nous distinguons ainsi les modèles statiques et les modèles dynamiques stochastiques-probabilistes (Kreikenbaum et al., 2004).

### **1.2.1 Modèles statiques**

Les modèles statiques appliqués en hydrodynamique, comme par exemple dans le dimensionnement hydraulique d'une canalisation au moyen de la méthode rationnelle, ne tiennent compte, de manière explicite, ni de la variabilité des processus, ni des incertitudes. Les incertitudes peuvent être implicitement prises en considération (comme par exemple le débit), en les surévaluant pour disposer d'une certaine sécurité.

À l'époque de leur introduction, les modèles statiques se situaient à proximité de l'optimum entre les investissements et le profit (profit net maximum) (Kreikenbaum et al., 2004). Ils ont alors été introduits par commodité, en premier lieu par manque de capacité de calcul, mais aussi par manque de connaissances des processus et par manque de données. Avec l'évolution de l'informatique, le manque de capacité de calcul devient un problème mineur. C'est pourquoi les variabilités peuvent être traitées aujourd'hui et doivent l'être au moyen de modèles dynamiques.

### **1.2.2 Modèles dynamiques stochastique-probabilistes**

Une possibilité pour quantifier l'influence des incertitudes des paramètres sur le résultat d'un modèle consiste en une extension des modèles déterministes traditionnels en modèles stochastique-probabilistes (Lemaire et al., 2005). Un modèle stochastique est un modèle qui comporte des éléments aléatoires (probabiliste signifie : prendre en compte la probabilité d'apparition d'un résultat). Cette extension peut par exemple se réaliser au moyen d'une routine de simulation de type Monté Carlo.

Le modèle stochastique-probabiliste pronostique qu'une certaine partie des résultats satisfont aux exigences en matière de fiabilité, alors que ce n'est pas le cas pour le reste des résultats, selon la définition présentée ci-dessus. Ce point peut aussi être exprimé comme une probabilité de défaillance  $P_f$  qui se trouve dans l'intervalle  $0 \leq P_f \leq 1$ . Comme réponse, un modèle stochastique-probabiliste délivre donc une probabilité de satisfaire les exigences fixées (la fiabilité :  $R = 1 - P_f$ ).

### **1.3 Planification de modèles stochastique-probabilistes**

#### **1.3.1 Élaboration de modèle**

La première étape consiste à abstraire la situation réelle et à reproduire les processus au moyen de modèles adaptés. Lors de l'utilisation de programmes de simulation commerciaux, le choix des modèles est généralement fixé à l'avance. Néanmoins, la question se pose souvent de savoir comment un écoulement réel complexe donné peut être simplifié et idéalisé de manière optimale (Roux, 2004; Hostache, 2006).

#### **1.3.2 Acquisition des données**

Les modèles à utiliser étant connus, les données nécessaires doivent être introduites dans ce modèle. En plus des données nécessaires, les incertitudes et les erreurs de mesure doivent être quantifiées (Tekatlian, 2001). Celles-ci servent à la description mathématique des incertitudes dans l'évaluation stochastique-probabilistes.

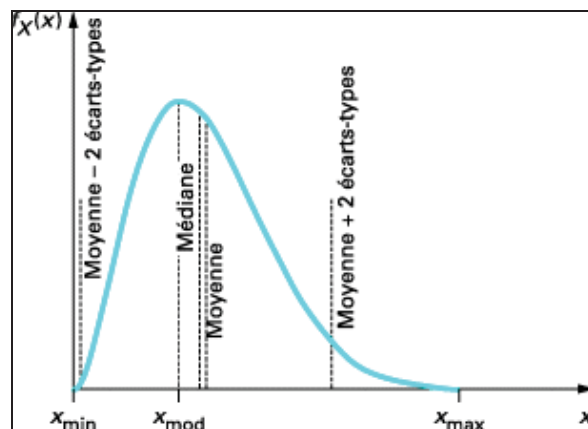
Exemple : Lors de la détermination du coefficient de frottement de Manning d'un bassin au moyen d'un exercice d'étalonnage réalisé avec une dizaine de points de mesures dispersés dans le bassin, non seulement la valeur moyenne du paramètre est d'un grand intérêt, mais également l'estimation des incertitudes ou des erreurs de mesure (par exemple  $n = 0.04 \pm 0.008 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}$ ).

### 1.3.3 Analyse de sensibilité

Les paramètres du modèle peuvent être pris en compte plus efficacement si ceux-ci sont tout d'abord déterminés de manière grossière et soumis à une analyse de sensibilité (Magne et Vasseur, 2006). Cette analyse donne des informations relatives à l'influence des différents paramètres du modèle sur le résultat calculé. Les paramètres sensibles doivent être relevés avec un soin particulier, de manière à ce que les incertitudes sur ces paramètres soient fortement diminuées. En se basant sur les résultats de l'analyse de sensibilité, les données peuvent être détaillées en fonction de leur influence sur le résultat calculé.

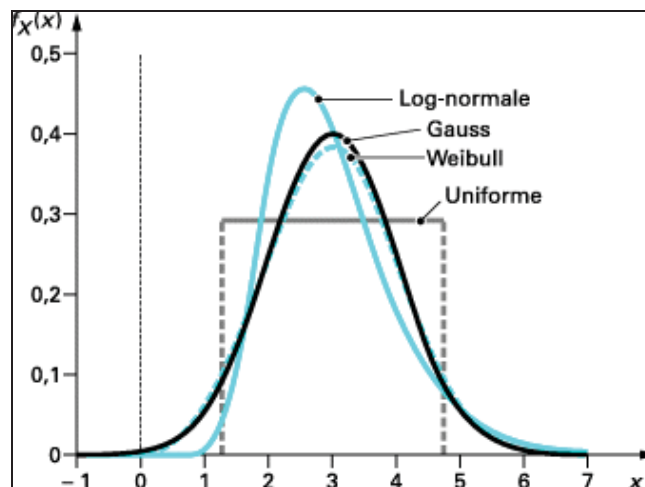
### 1.3.4 Description mathématique des incertitudes

Lorsque les données sont acquises, les incertitudes doivent être formulées mathématiquement pour la modélisation de type stochastique-probabiliste (Lemaire et al., 2001). Cela se fait en choisissant le type et les paramètres d'une fonction de distribution (par ex. distribution normale, log-normale, Weibull, uniforme, triangulaire, etc.) de façon à obtenir une description fidèle des incertitudes (Figure 1.1 et Figure 1.2).



**Figure 1.1** *Allure générale d'une densité de probabilité et principales quantités d'intérêt*  
(Lemaire, 2008)

Exemple : Une valeur de  $0.04 \text{ m}^{-1/3} \cdot \text{s}$  pour le coefficient de Manning d'un bassin a été déterminée. L'incertitude de cette mesure s'élève à  $\pm 0.008 \text{ m}^{-1/3} \cdot \text{s}$ . Les incertitudes liées à ce paramètre dans le modèle peuvent être décrites avec une distribution uniforme. C'est à dire qu'en simulation de type Monté Carlo, le coefficient de frottement de Manning sera choisi au hasard à l'intérieur d'une plage située entre  $0.032$  et  $0.048 \text{ m}^{-1/3} \cdot \text{s}$ .



**Figure 1.2** *Représentation des densités de Gauss, log-normale, uniforme et de Weibull de mêmes moyennes et écarts-types.*  
(Lemaire, 2008)

Pour décrire les incertitudes de manière précise, les corrélations entre les différents paramètres doivent être prises en compte. Les informations relatives à ce sujet ne sont pas toujours disponibles dans le domaine hydraulique.

### 1.3.5 Calcul, évaluation et interprétation des résultats

Le calcul se fait généralement à l'aide de la simulation de Monté Carlo, l'exploitation et l'interprétation des résultats débutent après qu'un nombre approprié d'itérations ait été effectué. L'intérêt est porté en premier lieu sur les probabilités calculées grâce auxquelles il est possible d'estimer si l'ouvrage respecte les exigences en matière de sécurité (Magne et Vasseur, 2006; De Rocquigny et al., 2008).

## 1.4 Principales approches pour tenir compte des incertitudes

Parmi les méthodes disponibles dans la littérature, nous avons choisi d'en présenter quatre grandes familles d'études qui nous paraissent les plus répandues dans le calcul de la fiabilité: les méthodes à base de simulations, les méthodes approchées, les méthodes par développement stochastique et les méthodes par surface de réponse.

### 1.4.1 Méthodes à base de simulations

Dans le premier groupe, on trouve d'abord les méthodes de type Monté Carlo. Elles consistent à déterminer un estimateur de la probabilité  $P_f$  par succession de tirages en accord avec la loi des paramètres. Les différences entre les diverses approches de ce type reposent essentiellement sur la façon dont sont réalisées les simulations. D'une stratégie intuitive, où les simulations sont réalisées dans l'espace entier des paramètres acceptables, vers les stratégies économiques, où les simulations sont contenues aux voisinages de zones a priori favorables en termes de densité de probabilité, ces approches directes permettent une estimation réaliste des probabilités recherchées. Dans ce cadre, les méthodes les plus répandues sont :

- Simulations de Monté Carlo classique (Rubinstein, 1981) : elles constituent le moyen le plus coûteux, mais certainement le plus sûr, pour l'évaluation de la probabilité de défaillance. L'ouvrage (Rubinstein, 1981) en donne une large description.
- Simulations directionnelles – Directional Sampling (Déak, 1980; Bjerager, 1988) : elles constituent un moyen plus économique que les simulations de Monté Carlo tout en ne nécessitant pas d'informations supplémentaires. Dans l'espace standard, la densité de probabilité multi-normale présente une symétrie rotationnelle. Il peut être avantageux d'effectuer des tirages d'une façon radiale, surtout quand l'état-limite se rapproche d'une hyper-sphère.

- Tirages d'importance – Importance Sampling (Melchers, 1990) : comme le poids de la probabilité de défaillance est situé au voisinage du point de conception (§ 2.1.5), il est plus efficace de concentrer les tirages autour de ce point. Les tirages d'importance donnent des résultats satisfaisants si le point de conception a été bien identifié.
- Tirages conditionnés – Conditional Sampling (Bernard et Fogli, 1987) : l'objectif de cette approche est d'éliminer un maximum de tirages qui n'ont aucune chance d'appartenir au domaine de défaillance. Comme le point de conception est le point le plus proche de l'origine appartenant au domaine de défaillance, nous pouvons exclure le domaine défini par l'hyper-sphère centrée à l'origine et ayant un rayon égal à l'indice de fiabilité (§ 2.1.6).
- Méthode du pavé – hyper-cube latin : dans cette méthode, les tirages sont effectués d'une façon uniforme dans un pavé dont le centre est le point de conception. La méthode de l'hyper-cube latin est réputée peu efficace pour les faibles probabilités.
- Tirages adaptatifs – Adaptive Sampling (Bucher, 1988) : pour estimer la probabilité de défaillance, il nous suffirait de faire un seul tirage si nous connaissons la fonction de probabilité conditionnée par l'appartenance au domaine de défaillance. Or cette fonction n'est pas connue à l'avance. La méthode des tirages adaptatifs utilise les informations acquises au cours des simulations effectuées pour estimer la distribution conditionnelle à partir d'une statistique sur les points obtenus dans le domaine de défaillance. La nouvelle distribution est donc utilisée pour effectuer les tirages ultérieurs.
- Méthodes du tirage d'importance conditionnée : on combine le tirage d'importance et le tirage conditionné pour espérer une efficacité maximale du calcul en localisant le calcul tout en ne prenant pas en compte les points situés à une distance de l'origine inférieure à l'indice de fiabilité. (Sellier et Mébarki, 1993) donne une approche comparative des différentes méthodes.

- Méthode du tirage stratifié (Rubinstein, 1981) : cette méthode est fondée sur le découpage de l'espace d'intégration en un certain nombre de domaines disjoints pour lesquels les probabilités peuvent être calculées de manière indépendante. La réduction de la variance est obtenue à travers l'augmentation du nombre de tirages dans les domaines importants.

#### 1.4.2 Méthodes approchées

La seconde famille regroupe les méthodes d'approximations, essentiellement utilisées en fiabilité des structures (Madsen et al., 1986). Dans ce cadre, les méthodes les plus répandues sont les méthodes FORM (First Order Reliability Method), SORM (Second Order Reliability Method) et RGMR (Riemannian Geometrical Method for Reliability) que nous présentons ici. Les méthodes FORM et SORM consistent à approcher le domaine d'intégration par sa restriction à l'ordre un ou deux, et à ramener le calcul de probabilité à des formules simples, à l'aide des propriétés de la distribution gaussienne. La méthode RGMR est une méthode d'évaluation numérique des intégrales de faible valeur (calcul exact de la probabilité de défaillance), elle est issue des travaux de Mitteau (Mitteau, 1995). Elle utilise la géométrie Riemannienne permettant le calcul des hyper-surfaces dans des espaces de dimension quelconque. L'évaluation numérique directe, souvent considérée comme inaccessible par beaucoup d'auteurs, devient optimale dans le sens où la quantité de calculs est minimale pour une précision de calcul demandée. Ces méthodes ont été spécifiquement développées pour l'étude des petites probabilités (Breitung, 1984; Ditlevsen et Bjerager, 1986; Dolinski, 1983; Tvedt, 1989). Elles abandonnent le domaine des grandes probabilités ( $> 10^{-2}$ ), au profit des probabilités les plus petites. Cet aspect revêt un intérêt particulier dans la mesure où les domaines critiques s'avèrent les plus éloignés de l'origine. Ils engendrent donc les plus petites probabilités, là où la plupart des méthodes de tirages échouent, en partie à cause du très grand nombre d'expériences nécessaires. Ces méthodes sont beaucoup moins coûteuses que celles des tirages, quelques problèmes restent cependant ouverts et elles sont, pour la plupart, plus compliquées à mettre en œuvre. Les points de départ des méthodes FORM et SORM sont le théorème de compactification (Breitung, 1994; Breitung et Hohenbichler,



1989), les notions d'indice de fiabilité (Hasofer et Lind, 1974) et de points de conception. Le théorème assure qu'asymptotiquement le domaine d'intégration peut être restreint à des voisinages bien choisis sans perte de précision. A la différence des méthodes du premier groupe, toutes ces méthodes n'ont de sens que dans l'espace de paramètres aléatoires gaussiens.

### **1.4.3 Méthodes par développement stochastique**

Nous appelons méthode d'éléments finis stochastiques, une modélisation numérique fondée sur une méthode d'éléments finis dans laquelle certaines variables d'état sont des champs aléatoires. Les méthodes d'éléments finis stochastiques (MEFS), ont été développées depuis une trentaine d'années (Nakagiri et Hisada, 1985; Shinozuka et Yamasaki, 1988; Schueller et al., 1997; Sudret et Der Kiureghian, 2000; Keese, 2003; Lemaire et al., 2005). Du point de vue des MEFS, on s'attache plus à chercher les propriétés stochastiques de la réponse du modèle étudié, c'est-à-dire à effectuer une analyse de sensibilité plutôt que de fiabilité. Bien évidemment, ces deux points de vue sont liés car connaître les propriétés stochastiques de la réponse du modèle étudié est d'un grand intérêt pour l'analyse de fiabilité (Florès Macias, 1994; Florès Macias et Lemaire, 1997; Sudret et Der Kiureghian, 2002).

L'objet d'une MEFS est donc tout d'abord d'étudier la variabilité d'une réponse aléatoire donnée par un modèle éléments finis dont les entrées sont aléatoires. Les principales MEFS actuellement disponibles dans la littérature sont :

- Les méthodes de perturbations sont intéressantes pour des problèmes faiblement non linéaires, où le coefficient de variation des variables aléatoires ou champs d'entrée n'est pas élevé (15 à 20% maximum pour certaines applications). Le nombre de variables aléatoires considérées en entrée doit être raisonnable. La méthode FOSM (First Order Second Moment Method), développée par Cornell (Cornell, 1971), peut être utilisée pour la modélisation d'ouvrages du génie civil mécaniquement non linéaires. Mellah (Mellah, 1999) emploie cette approche pour la modélisation d'un barrage, en tenant compte d'un comportement élasto-plastique du matériau. La méthode FOSM s'applique sans

modification du modèle élément finis, mais ne peut en pratique prendre en compte qu'un nombre restreint de variables aléatoires (difficultés numériques). La méthode de perturbation classique (Hisada et al., 1983; Yamazaki et al., 1988, Kleiber et Hien, 1992) est applicable dans un cadre non linéaire mais les conclusions des travaux sur cette approche (Sudret et Der Kiureghian, 2000) soulignent que les coefficients de variations des variables aléatoires d'entrée doivent être faibles.

- La méthode fondée sur une discrétisation par intégrales pondérées, développée par Deodatis et Takada (Deodatis, 1991; Takada, 1990), Cette technique, appelée dans la littérature « méthode des intégrales pondérées (MIP) » (weighted integrals method), s'applique à l'étude de structures élastiques. Les paramètres variables peuvent être modélisés par des champs gaussiens, si la rigidité dépend linéairement de ceux-ci. Cette méthode nécessite la modification du modèle éléments finis et dépend aussi du maillage. Sudret et Der Kiureghian (Sudret et Der Kiureghian, 2000) soulignent d'une part, les difficultés de l'estimation de la variance de la réponse du modèle élément finis, eu égard à la complexité de l'expression de sa fonction de variabilité et d'autre part, un temps de calcul prohibitif pour des structures à grand nombre de ddl.
- La méthode des éléments finis stochastiques spectraux (MEFSS) (Ghanem et Spanos, 1991; Sudret et Der Kiureghian, 2000), est appliquée à des problèmes linéaires où l'aléa peut être modélisé par des variables aléatoires ou par des champs gaussiens ou lognormaux, quelle que soit la covariance associée. L'approche est intéressante pour l'étude de processus gaussiens ou lognormaux, caractérisés par certaines covariances, pour lesquelles la décomposition spectrale des processus est explicite. Un grand nombre de variables aléatoires d'entrée peut être pris en compte. Les applications de la MEFSS sont nombreuses, mais restent limitées à des problèmes linéaires.
- La méthode de quadrature (Baldeweck, 1999) permet d'estimer les moments d'ordre  $i$  d'une variable aléatoire, cette méthode est en fait une méthode d'intégration numérique du type schéma de Gauss. La méthode de quadrature est applicable à toute catégorie de

problème mécanique. Elle s'applique de manière externe au modèle éléments finis; elle est simplement limitée à un nombre restreint de variables aléatoires modélisant les paramètres d'entrée du modèle, les coefficients de variation de ces paramètres d'entrée doivent être relativement modérés, suivant la non-linéarité du problème traité.

#### **1.4.4 Méthodes par surface de réponse**

L'utilisation de surfaces de réponse dans les problèmes de fiabilité n'est pas récente et elle fait toujours l'objet de nouvelles contributions. Des travaux ont permis de poser les concepts (Faravelli, 1989; El-Tawil et al., 1991; Rajashekhar et Ellingwood, 1993; Lemaire, 1998), de construire des solutions dans l'espace physique (Bucher et Bourgund, 1990), de proposer des méthodes d'évolution (Enevoldsen et al., 1994; Devictor, 1996; Kim and Na, 1997). La méthode par surface de réponse est une approche complémentaire, plutôt qu'une méthode de fiabilité en soi, elle consiste à remplacer le modèle physique initial par une approximation dite surface de réponse, qui soit numériquement rapide à calculer. Cette surface de réponse peut être construite sur la base de polynômes, de réseau de neurones, de développement stochastique, voire d'un modèle physico-industriel simplifié (Olivi, 1984; Box et al., 1987; Devictor, 1996; Kleijnen et Sargent, 2000; De Rocquigney, 2005; Sudret, 2005).

Il s'agit en suite de lui appliquer une méthode de fiabilité gourmande en CPU mais très sûre (généralement la simulation Monté Carlo classique). L'intérêt essentiel réside dans le découplage numérique entre le modèle mécanique (élément finis) et le modèle fiabiliste. L'inconvénient principal résulte du fait que les calculs fiabilistes sont effectués avec un modèle mécanique approché.

### **1.5 Codes de calculs probabilistes**

Une revue des différents codes de simulation probabiliste a été récemment réalisée par Pellissetti et Schuëller (Pellissetti et Schuëller, 2006) dans laquelle ces auteurs décrivent pour chacun des outils existants leur cadre d'application, les algorithmes de résolution utilisés

ainsi qu'une évaluation de leurs possibilités (couplage avec les éléments finis, calcul parallèle,...).

Tableau 1.1 Codes de calculs probabilistes et les auteurs  
(Pellissetti et Schuëller, 2006)

Logiciels de fiabilité	Auteurs
ANSYS PDS & DesignXplorer	S. Reh, J.-D. Beley, S. Mukherjee, E.H. Khor
CalREL/FERUM/OpenSees	A. Der Kiureghian, T. Haukaas, K. Fujimura
COSSAN	G.I. Schuëller, H.J. Pradlwarter
NESSUS	B.H. Thacker, D.S. Riha, S.K. Fitch, L. Huyse, J.B. Pleming
PERMAS-RA/STRUREL	S. Gollwitzer, B. Kirchgaßner, R. Fischer, R. Rackwitz
PHIMECA	M. Lemaire, M. Pendola
PROBAN	L. Tvedt
PROFES	Y.-T. Wu, Y. Shin, R.H. Sues, M.A. Cesare
UNIPASS	H.-Z. Lin, M.R. Khalessi

## 1.6 Objectifs du mémoire

La présente étude a pour objectif de développer un code probabiliste, performant en termes de temps de calcul et de précision, et permettant le couplage entre les méthodes fiabilistes les plus standards (Monté Carlo, FORM et tirages d'importance) et les calculs aux éléments finis ou volumes finis, dans les cas des modélisations en hydrodynamique des rivières.

Il sera ensuite question de valider le code. Les tests de validation et de d'évaluation de l'efficacité de cet algorithme seront faits sur un écoulement simple référencé dans la littérature. La dernière partie de ce mémoire portera sur le traitement des écoulements réels dans des bassins naturels, la rivière de l'Aisne en France et le bassin de Saint-Timothée sur le bras nord du fleuve Saint-Laurent, afin de cerner l'effet des incertitudes en modélisation hydrodynamique et de contribuer à la compréhension de la défaillance en analysant la

sensibilité des paramètres hydrologiques et hydrauliques introduites dans l'exercice de modélisation sur la fiabilité.

## **1.7 Plan du mémoire**

Le mémoire que nous présentons est divisé en cinq parties principales.

La première et la deuxième partie présentent une étude bibliographique relative aux méthodes de fiabilité, dans le contexte de leur couplage avec un code en volumes finis. La troisième partie expose les démarches nécessaires à ce couplage.

La quatrième partie du mémoire est consacrée au développement d'une méthode probabiliste efficace en termes de temps et de précision de calcul de l'indice de fiabilité. Cette méthode, appelée BFGS, est une amélioration de l'algorithme Rackwitz-Fiessler (HLRF). Elle permet une estimation efficace de la hessienne même si le modèle associé à la fonction d'état limite ne peut être défini qu'avec une certaine précision, ce qui est généralement le cas pour les problèmes non linéaires. Elle est testée sur un exemple référencé dans le guide du logiciel de modélisation hydraulique Mascaret. Le test montre son efficacité en termes de gain de temps de calcul et de précision par rapport aux méthodes antérieures et par rapport au logiciel commercial de fiabilité Nessus (Riha et al., 2002).

La cinquième partie apporte des éléments essentiels permettant de cerner l'effet de l'incertitude sur la grandeur choisie. L'étude aborde deux problèmes souvent rencontrés en modélisation hydrodynamique : l'intervalle de confiance de la ligne d'eau d'une rivière, l'exemple de l'étude se situe sur la rivière de l'Aisne en France, et la probabilité de dépassement de la hauteur d'une digue de protection, le mur de protection du village de Saint-Timothée sur le bras nord du fleuve Saint-Laurent.

Enfin, les conclusions et les perspectives des travaux effectués sont proposées.

## CHAPITRE 2

### DÉFINITIONS DU CALCUL EN FIABILITÉ

#### 2.1 Nature du problème et définitions

La mécanique probabiliste est un domaine de fiabilité qui permet de tenir compte des incertitudes concernant un système physique et d'étudier l'impact de ces incertitudes sur la réponse du modèle qui représente le système étudié. D'un point de vue scientifique, ce domaine est apparu dans les années 70 dans des études de génie civil bien que les premières contributions soient apparues au cours de la première partie du 20ème siècle (Mayer, 1926; Freudenthal, 1947; Lévi, 1949). La mécanique probabiliste correspond à un couplage entre d'une part, la modélisation d'un phénomène physique (ex. génie civil, génie mécanique, etc.) et d'autre part, les mathématiques appliquées (ex. statistiques, théorie des probabilités et simulation numérique). On définit ci-dessous les points essentiels d'un calcul de fiabilité :

##### 2.1.1 Variables de base

Appelées aussi variables de conception, les variables de base sont les composantes d'un vecteur  $z$ . Ce sont des variables aléatoires d'entrée d'un calcul de fiabilité. Elles sont caractérisées par une loi de densité conjointe de probabilité  $f_{Z_1, \dots, Z_n}(z_1, \dots, z_n)$ , où  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  est le vecteur des réalisations des variables aléatoires  $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ . Cette information est souvent indisponible, elle est limitée à la connaissance des deux propriétés suivantes :

- La loi marginale de chaque variable  $Z_i$  :  $f_{Z_i}(z_i)$ ;
- La corrélation entre chaque couple de variables  $(Z_i, Z_j)$  :  $\rho_{ij}(Z_i, Z_j)$ .

### 2.1.2 Fonction d'état limite

Il s'agit de préciser l'état limite au-delà duquel le système physique n'est plus considéré comme fiable. Ces états limites correspondent principalement à des exigences en termes de tenue mécanique (la défaillance est associée à la ruine du système étudié) ou d'aptitude au service (la défaillance est associée à des dépassements excessifs de la capacité).

Appelée aussi fonction de défaillance et notée  $G(z)$ , son intersection avec l'hyperplan des variables définit la frontière entre le domaine de sécurité  $D_s$  et le domaine de défaillance  $D_f$  (Figure 2.1). Une valeur positive de  $G$  signifie que les réalisations des variables aléatoires conduisent à une situation de sécurité et une valeur négative signifie qu'elles conduisent à une situation de défaillance. La courbe représentant  $G(z) = 0$  est appelée courbe d'état limite.

### 2.1.3 Probabilité de défaillance

C'est la probabilité d'avoir une valeur négative d'une réalisation de la fonction d'état  $G(z)$ , elle est notée  $P_f$  (probability of failure). On a donc :

$$\begin{aligned} P_f &= \text{Prob}(G(z) \leq 0) \\ &= \int_{D_f} f_{Z_1, Z_2, \dots, Z_n}(z_1, z_2, \dots, z_n) dz_1 \dots dz_n \end{aligned} \quad (2.1)$$

où  $f_{Z_1, Z_2, \dots, Z_n}(z_1, z_2, \dots, z_n)$  est la densité conjointe de probabilité du vecteur aléatoire  $z$ .

Lorsque les  $n$  variables aléatoires  $Z_i$  sont indépendantes, l'expression de la densité conjointe se ramène au produit des densités marginales  $f_{Z_i}$  de chaque variable :

$$f_{Z_1, Z_2, \dots, Z_n}(z_1, z_2, \dots, z_n) = \prod_{i=1}^n f_{Z_i}(z_i) \quad (2.2)$$

Différentes techniques permettent d'estimer la probabilité de défaillance. Elle peut être déterminée par des méthodes directes de simulation ou par l'intermédiaire de l'indice de fiabilité.

#### 2.1.4 Transformation isoprobabiliste

La transformation du vecteur aléatoire  $z$  dans l'espace physique en un vecteur aléatoire gaussien centré réduit  $u$ , dont la moyenne est zéro et la matrice de covariance est la matrice unitaire, est nécessaire à la détermination du point de conception. Si les variables sont indépendantes et si les fonctions de distributions sont connues, la transformation  $T$  la plus simple consiste à transformer séparément chaque variable  $z_i$  en une variable  $u_i$  normale centrée réduite par :

$$T : u_i = \Phi^{-1}(F_i(z_i)) \quad (2.3)$$

où  $\Phi$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite (de moyenne 0 et d'écart type 1) et  $F_i(z_i)$  la fonction de distribution de la variable  $z_i$ .

La fonction d'état limite est notée dans le nouvel espace Gaussien comme suit :

$$H(u) = G(z) \quad (2.4)$$

#### 2.1.5 Point de conception

Appelé aussi le point de défaillance le plus probable ou point critique (point  $u^*$  de la Figure 2.2), il a la plus grande probabilité d'occurrence lors d'une réalisation des variables aléatoires. Le point de conception est le point le plus proche de l'origine sur la surface d'état limite dans l'espace des variables centrées réduites. Il est évalué dans ce nouvel espace en résolvant un problème d'optimisation sous contrainte.



### 2.1.6 Indice de fiabilité

L'indice de fiabilité est une mesure de la fiabilité notée  $\beta$ . Il permet d'obtenir une approximation de la probabilité de défaillance. Il existe dans la littérature plusieurs types d'indices de fiabilité parmi lesquels :

- L'indice de fiabilité de Cornell (Cornell, 1969) défini par :

$$\beta_c = \frac{E(G(z))}{D(G(z))} \quad (2.5)$$

où  $G(z)$  est la fonction d'état limite,  $E(G(z))$  est l'espérance mathématique de  $G(z)$  et  $D(G(z))$  son écart-type.

- l'indice de fiabilité de Hasofer-Lind  $\beta_{HL}$  (Hasofer et Lind, 1974), défini comme la distance la plus courte entre la courbe d'état limite  $H(u) = 0$  et l'origine du repère dans un espace normé réduit des variables aléatoires décorréélées (Figure 2.2). Il est égal à la distance du point de défaillance  $u^*$  à l'origine du repère :

$$\beta_{HL} = \|u^*\| \quad (2.6)$$

Le point  $u^*$  est proportionnel au vecteur unitaire  $\alpha^*$ , vecteur des cosinus directeurs, normal à la surface de défaillance en  $u^*$ , soit :

$$u^* = \beta_{HL} \alpha^* \quad (2.7)$$

Le point  $u^*$  est déterminé comme la limite d'une séquence  $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(m)}, \dots$ . Le vecteur unitaire normal à la surface de défaillance définie par  $H(u)$  au point  $u^{(m)}$  est noté  $\alpha^{(m)}$ . Le vecteur  $\alpha^{(m)}$  est parallèle au vecteur gradient en  $u^{(m)}$  et dirigé vers le domaine de défaillance:

$$\alpha^{(m)} = -\frac{\nabla H(u^{(m)})}{\|\nabla H(u^{(m)})\|} \quad (2.8)$$

### 2.1.7 Algorithmes d'optimisation de Rackwitz-Fiessler pour la détermination de $\beta_{HL}$ (HLRF)

Cet algorithme est une adaptation de la méthode du gradient projeté au problème d'optimisation en fiabilité mécanique (Rackwitz, 1976; Rackwitz et Fiessler, 1979), dans laquelle le calcul de l'indice de fiabilité de Hasofer Lind  $\beta_{HL}$  est un problème d'optimisation sous contrainte :

$$\text{minimiser: } \|u\|^2 \quad \text{sous la contrainte: } H(u) = 0 \quad (2.9)$$

où  $H(u)$  est la fonction d'état dans l'espace normé réduit.

La fonction à minimiser est la distance euclidienne dans l'espace standardisé. L'algorithme de Rackwitz et Fiessler résout itérativement le problème en générant une suite de points qui converge vers une solution optimale. Le point de défaillance le plus probable est obtenu par itérations successives lorsque les précisions souhaitées sur la fonction d'état limite  $\varepsilon_H$  et sur deux points consécutifs de l'algorithme  $\varepsilon_u$  sont obtenues, soit pour deux itérations successives  $k$  et  $k+1$  :

$$|H(u^{(k)})| \leq \varepsilon_H \quad \text{et} \quad \|u^{(k+1)} - u^{(k)}\| \leq \varepsilon_u.$$

L'indice  $\beta_{HL}^{(k+1)}$  est la norme du vecteur des variables aléatoires dans l'espace standardisé.  $u^{(k+1)}$ , déduit de  $u^{(k)}$  par :

$$u^{(k+1)} = \left( {}^T u^{(k)} \alpha^{(k)} + \frac{H(u^{(k)})}{\|\nabla H(u^{(k)})\|} \right) \alpha^{(k)} \quad (2.10)$$

La singularité de cette méthode réside dans la nécessité d'évaluer le vecteur gradient de la fonction d'état.

Les trois voies principales de calcul de la probabilité de défaillance  $P_f$  sont :

- La technique de simulation directe par la méthode de Monte Carlo. Cette méthode est la plus précise mais elle aussi est la plus coûteuse. Le calcul d'une probabilité de défaillance approchée  $P_f$  se fait en mesurant la taille de l'échantillon (composé de  $N$  tirages de variables de base) des réalisations situées à l'intérieur du domaine de défaillance. Notons qu'en faisant tendre la taille de l'échantillon vers l'infini, la probabilité de défaillance approchée tend vers la probabilité de défaillance réelle;
- Le calcul par l'intermédiaire de l'indice de fiabilité  $\beta$ . La méthode FORM est utilisée pour permettre d'évaluer  $\beta$ ;
- La simulation par tirage d'importance, elle permet de cibler les tirages des variables  $z_i$  de base autour du point de conception  $u^*$ . Cela permet de réaliser de meilleures approximations de  $P_f$  pour des échantillons de taille limitée.

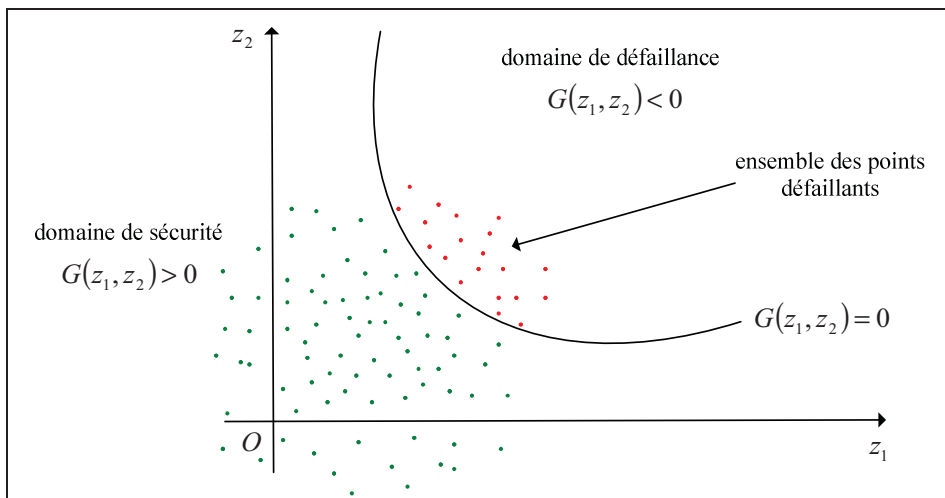
## 2.2 Méthode de simulation directe (Monte Carlo)

La simulation Monte Carlo directe (Rubinstein, 1981; Melchers, 1999; Lemaire et al., 2005) est la technique la plus simple pour estimer une espérance ou une intégrale mathématique.

Elle consiste à effectuer un grand nombre de tirages  $N$  des variables aléatoires du problème étudié. Pour chaque tirage, la fonction d'état est calculée et l'on dénombre les tirages conduisant à la défaillance du système  $N_{def}$ . La probabilité de défaillance  $P_f$  est alors estimée par le rapport entre le nombre de tirages conduisant à la défaillance  $N_{def}$  et le nombre total de tirages  $N$ , soit :

$$P_f = \frac{N_{def}}{N} \quad (2.11)$$

L'avantage de cette méthode est qu'elle n'impose aucune condition de continuité ni de dérivabilité de la fonction d'état. Cette méthode permet en plus d'estimer la précision de la valeur de la probabilité de défaillance obtenue. Toutefois, elle conduit à des temps de calcul très élevés dès qu'il s'agit d'évaluer de faibles probabilités avec une précision raisonnable. Pour une probabilité de défaillance visée  $P_f$  et une seule variable aléatoire, un nombre minimum de  $C/P_f$  simulations doit être réalisé pour assurer une évaluation acceptable de  $P_f$  avec  $C$ , constante dépendant du niveau de confiance désiré et des paramètres et du type de densité de distribution concernée. En général,  $C$  est supérieure à 100. Pour  $n$  variables aléatoires indépendantes, le nombre de tirages doit dépasser  $(C/P_f)^n$  (Rubinstein, 1981).



**Figure 2.1** *Illustration de la simulation de Monté Carlo.*

La variance de l'estimation est égale à (Rubinstein, 1981) :

$$\nu_{MC} = \sqrt{\frac{P_f(1-P_f)}{N}} \quad (2.12)$$

L'erreur diminue en fonction du nombre d'essais en  $\sqrt{N}$ , une augmentation de la précision nécessite donc un coût élevé.

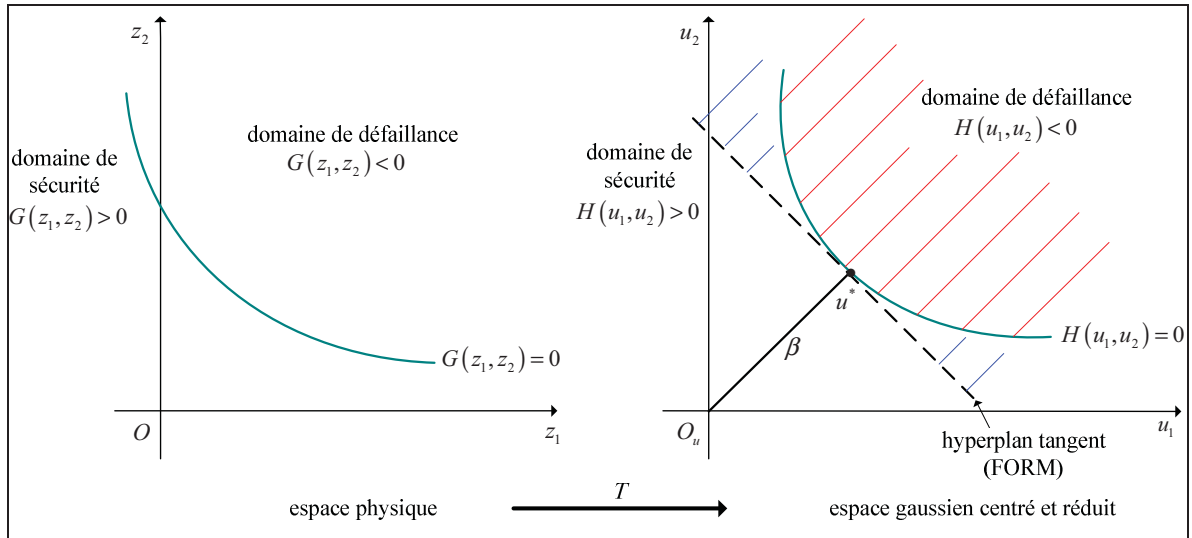
Le coefficient de variation est défini comme le quotient de l'écart-type par la moyenne :

$$c_v = \sqrt{\frac{1-P_f}{N P_f}} \quad (2.13)$$

Si  $P_f$  est petit par rapport à 1, le coefficient de variation est alors proche de  $1/\sqrt{N P_f}$ .

Plusieurs méthodes proposent d'améliorer la méthode de Monte Carlo, il s'agit entre autre de la 'Méthode de simulation directionnelle'. Elle utilise les propriétés de symétrie rotationnelle de l'espace des variables gaussiennes centrées réduites. La transformation iso probabiliste est utilisée pour effectuer un changement du repère transformant l'espace des variables physiques (lois de distributions quelconques) en un espace de variables gaussiennes centrées réduites. Cet espace est ensuite divisé en un certain nombre de directions caractérisées par un vecteur unitaire partant de l'origine du repère. La probabilité de défaillance du système est évaluée par un traitement statistique des valeurs des probabilités de défaillance calculées sur les différentes directions. Comme la méthode de Monte Carlo, cette méthode n'impose aucune propriété particulière de la fonction d'état limite et permet d'évaluer sans biais la probabilité de défaillance. Elle offre l'avantage d'être plus performante que cette dernière en terme de temps de calculs.

### 2.3 Méthodes basées sur l'indice de fiabilité



**Figure 2.2** *Définition de l'indice de fiabilité et de l'approximation FORM.*

#### 2.3.1 Méthode FORM

Une fois  $u^*$  et  $\beta$  obtenus, il reste à déterminer le domaine de défaillance. Les méthodes FORM (First Order Reliability Method) (Breitung, 1984; Madsen et al., 1986; Ditlevsen, 1996) et SORM (Second Order Reliability Method) sont basées sur des approximations de ce domaine permettant un calcul analytique de l'intégrale (2.1). Dans le cas de FORM, la surface limite  $H(u) = 0$  est ainsi approchée par l'hyperplan tangent à  $D_f$  en  $u^*$  (Figure 2.2).

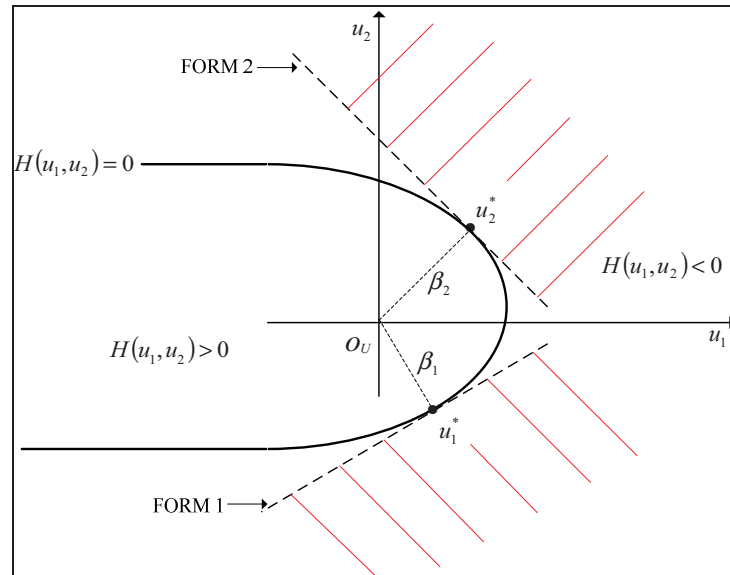
À partir de l'indice de fiabilité  $\beta$ , la probabilité de défaillance est estimée par :

$$P_f = P(G(z) \leq 0) \approx \Phi(-\beta) \quad (2.14)$$

L'égalité précédente est exacte pour le cas où les variables aléatoires de base sont gaussiennes avec un état limite linéaire.

La méthode Multi-FORM consiste à prendre en compte la possibilité de plusieurs points à forte densité dans le calcul de la probabilité pour corriger l'erreur de FORM. Le principe FORM est appliqué à plusieurs points significatifs  $u_i^*$ . Ces points sont à des distances à l'origine égales, ou légèrement supérieures, à  $\beta$ . La probabilité de défaillance est estimée par :

$$P_f \approx \sum_{i=1}^m \Phi(-\beta_i) \quad \text{avec } \beta_i \text{ indice de fiabilité associé à } u_i^* \quad (2.15)$$



**Figure 2.3** *Cas des minimums locaux.*

Il est essentiel, pour la précision des méthodes, de déterminer tous (ou, à défaut, le plus grand nombre de) ces points significatifs. Deux approches sont possibles : soit on essaie différents points de départ, en espérant que l'algorithme d'optimisation converge vers des solutions distinctes, soit on perturbe la fonction d'état au voisinage des points de conception déjà mis en évidence. Der Kiureghian et Dakessian (Der Kiureghian et Dakessian, 1998) proposent une technique pour perturber la fonction d'état limite.

Si  $u_i^*$  est un point de conception connu, alors l'ajout d'une fonction  $B_i$  positive exclut le voisinage de  $u_i^*$  de l'ensemble des solutions admissibles. La fonction d'état déformée est notée  $H_{def}$ , elle s'écrit alors :

$$H_{def}(u) = H(u) + \sum_{i=1}^m B_i(u) \quad (2.16)$$

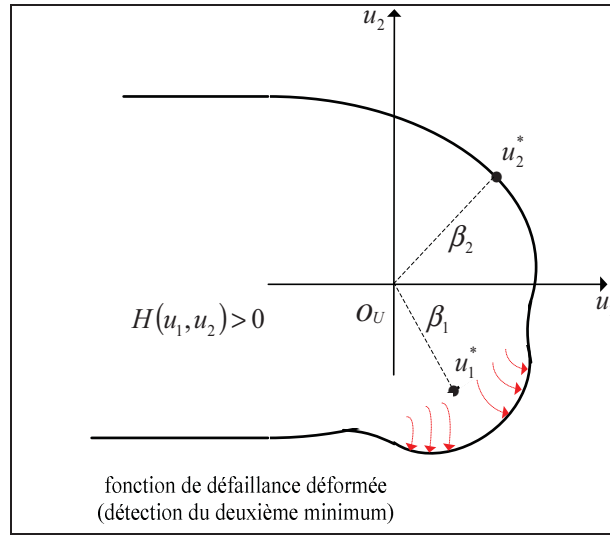
$$B_i(u) = \begin{cases} s_i \left( r_i^2 - \|u - u_i^*\|^2 \right)^2 & \text{si } \|u - u_i^*\| \leq r_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.17)$$

où :

$$r_i = \gamma \|u_i^*\| \quad s_i = \frac{\gamma \|u_i^*\| \|\nabla H(u_i^*)\|}{\left( (\gamma \|u_i^*\|)^2 - (\delta \|u_i^*\|)^2 \right)^2}$$

Les coefficients  $r_i$  et  $s_i$  doivent être suffisamment grands pour donner une déformation suffisante à la fonction d'état limite au voisinage de  $u_i^*$ . Les auteurs précisent qu'une valeur du paramètre  $\gamma$  autour de 1, mais pas égal à 1, est un bon choix, et que  $0 < \delta < \gamma$ . Pour nos applications, les valeurs  $\gamma = 0.9$  et  $0.6 \leq \delta \leq 0.7$ , sont utilisées.





**Figure 2.4** *Déformation du domaine au voisinage du point de conception.*

En introduisant cette formulation dans le problème d'optimisation, on ne peut pas converger à nouveau vers un point de conception précédemment identifié.

### 2.3.2 Méthode de tirage d'importance (Melchers, 1989)

Cette méthode consiste à utiliser d'abord la méthode FORM pour déterminer le point de conception  $u^*$ . Une fois  $u^*$  déterminé, une simulation limitée à des tirages au voisinage de ce point est réalisée pour améliorer l'évaluation de la probabilité de défaillance obtenue par la méthode FORM. Ainsi, elle permet de corriger l'erreur générée par l'approximation à l'ordre 1 de la surface d'état dans l'espace des variables gaussiennes centrées réduites. À partir de  $N$  tirages indépendants suivant la densité  $p$ , la probabilité de défaillance est estimée par :

$$P_f \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f_{z_1, z_2, \dots, z_n}(z_1, z_2, \dots, z_n)}{p(z_1, z_2, \dots, z_n)} I_{D_f}^{(i)} \quad (2.18)$$

Karamchandani (Karamchandani et al., 1988) ont proposé de choisir une densité d'importance initiale simple, puis de la modifier à partir des simulations réalisées au cours du traitement. D'autres méthodes de tirage d'importance sont présentées dans (Melchers, 1990).

Une comparaison entre plusieurs méthodes est présentée dans (Engelund et Rackwitz, 1993). Sellier (Sellier, 1995) a proposé d'utiliser une densité de tirage gaussienne à composantes indépendantes centrée sur  $u^*$  et réduite, dans ce cas la probabilité de défaillance est estimée par :

$$P_f \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( I_{D_f}^{(i)} \exp \left( -^T u^* u^{(i)} - \frac{\beta^2}{2} \right) \right) \quad (2.19)$$

## 2.4 Facteurs d'importance en fiabilité

Un des intérêts de FORM réside dans la possibilité d'accéder à des informations complémentaires sur la fiabilité. On peut effectivement accéder aux cosinus directeurs  $\alpha_i$  qui nous renseignent sur la sensibilité, au point de conception  $u^*$ , de l'indice de fiabilité  $\beta$  par rapport à chaque variable aléatoire normée  $u_i$ , de (1.7) on peut écrire :

$$\alpha_i = \frac{\partial \beta}{\partial u_i}(u^*) = - \frac{\nabla H(u_i^*)}{\|\nabla H(u^*)\|} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.20)$$

Plus le cosinus directeur est important en valeur absolue, plus la variable aléatoire associée joue un rôle stochastiquement important. Les valeurs des sensibilités fiabilistes ne sont pas exploitables pour la comparaison des variables. Pour remédier à ce problème, on doit normaliser les sensibilités pour obtenir les élasticités définies par :

$$e_{p_i} = \frac{p_i}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial p_i}(u^*) \quad (2.21)$$

où  $p_i$  représente  $u_i^*$ , la moyenne  $\mu_i$  ou l'écart type  $\sigma_i$ .

Comme  $\sum_i \alpha_i^2 = 1$ , il est usuel de représenter l'influence de la variabilité des variables de conception sous la forme d'un diagramme circulaire de surface unité.

Ces quantités permettent de préciser l'ampleur de la modification de l'indice de fiabilité lorsque le paramètre associé varie. Une valeur positive (resp. négative) de  $e_{p_i}$  correspond ainsi à un impact bénéfique (resp. néfaste) du paramètre  $p_i$  pour la fiabilité du système. Du point de vue de la conception, certains indicateurs sont couramment calculés : l'élasticité à la moyenne renseigne sur le dimensionnement à retenir ou sur la gamme préférentielle d'utilisation du système, l'élasticité à l'écart type oriente quant à elle le contrôle qualité pour éviter les dispersions.

## **2.5 Validation et comparaison des différentes méthodes sur un cas académique**

### **2.5.1 Introduction**

L'usage d'une méthode de Monté Carlo n'est pas toujours satisfaisant : le coût excessif de l'approche directe nous engage à proposer une alternative. Deux contraintes guident la sélection des méthodes que nous retiendrons pour l'étude des modèles hydrauliques : les approches probabilistes doivent être suffisamment précises et elles doivent représenter un gain en termes de temps de calcul par rapport aux méthodes de tirages directes.

Pour répondre à ces objectifs, nous testons la robustesse des méthodes présentées précédemment sur un exemple académique simple, qui nous permet de comparer la qualité des différentes formules en fonction de la courbure au voisinage du point de conception. Une discussion sur la méthode de tirage d'importance met en évidence la relation entre la courbure de la fonction d'état limite et le nombre de simulations nécessaires à l'obtention d'une précision satisfaisante.

La fonction retenue pour cette validation est :

$$h(z) = z_n - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} a_i z_i^2, \quad n = 8 \quad (2.22)$$

Le gradient de  $h$  est connu analytiquement, mais pour tester la robustesse des méthodes dans d'autres application (couplage avec un code en éléments finis ou volumes finis) le gradient est évalué par la méthode des différences finies. Les courbures principales de  $h$  valent  $(a_i)_{i=1, \dots, n-1}$  (plus  $a$  est petit et plus la fonction  $h$  se rapproche d'une forme linéaire). Nous cherchons à estimer la probabilité de l'événement  $h(z) \geq M$  pour différentes valeurs de  $M$ . Le choix  $a_i = i \times a$ , avec  $a$  une constante arbitraire, offre la possibilité de présenter, sur un seul cas, plusieurs courbures de grandeur petites et grandes. De plus, toutes les courbures sont de même signe.

Nous supposons que les variables aléatoires  $z_i$  sont toutes gaussiennes centrées réduites et indépendantes deux à deux. Ces tests permettent une étude critique des approches précédentes en fonction de :

- L'évolution des différentes méthodes pour des valeurs de  $M$  décroissantes ;
- L'influence des courbures sur le comportement des diverses méthodes.

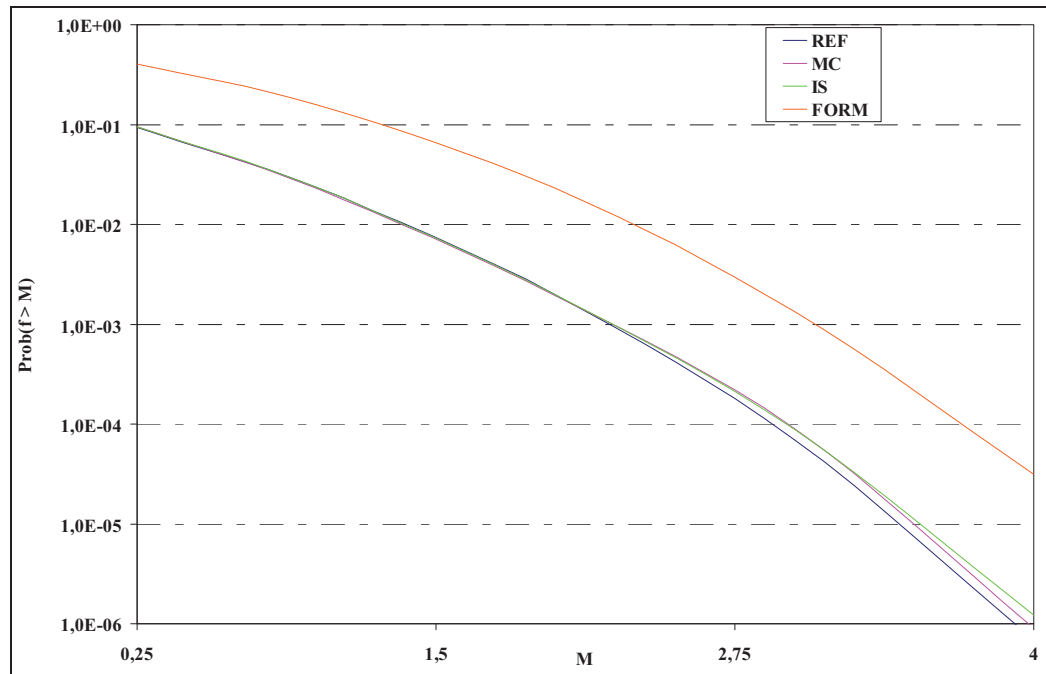
### 2.5.2 Influence de la courbure

Nous avons considéré 8 variables aléatoires. La variation des courbures se fait par modification du paramètre  $a$ , les valeurs  $10^{-1}$ ,  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$  sont choisies. La convergence de l'algorithme d'optimisation est particulièrement rapide (une dizaine d'itérations).

### Notations :

- REF : Méthode de Monte Carlo directe avec  $10^7$  simulations. Cette méthode sert de référence;
- MC : Méthode de Monte Carlo directe avec un nombre suffisant de simulations  $10^5$  ;
- IS : Méthode de tirage d'importance avec  $2 \times 10^3$  simulations centrées réduites autour du point de conception;
- FORM : Méthode du premier ordre FORM, couplée à l'algorithme d'optimisation HLRF.

Dans les trois cas suivants, on fait varier le paramètre  $\alpha$ . Celui-ci influe directement sur la courbure.



**Figure 2.5** *Évolution des méthodes probabilistes, cas  $\alpha = 10^{-1}$ .*

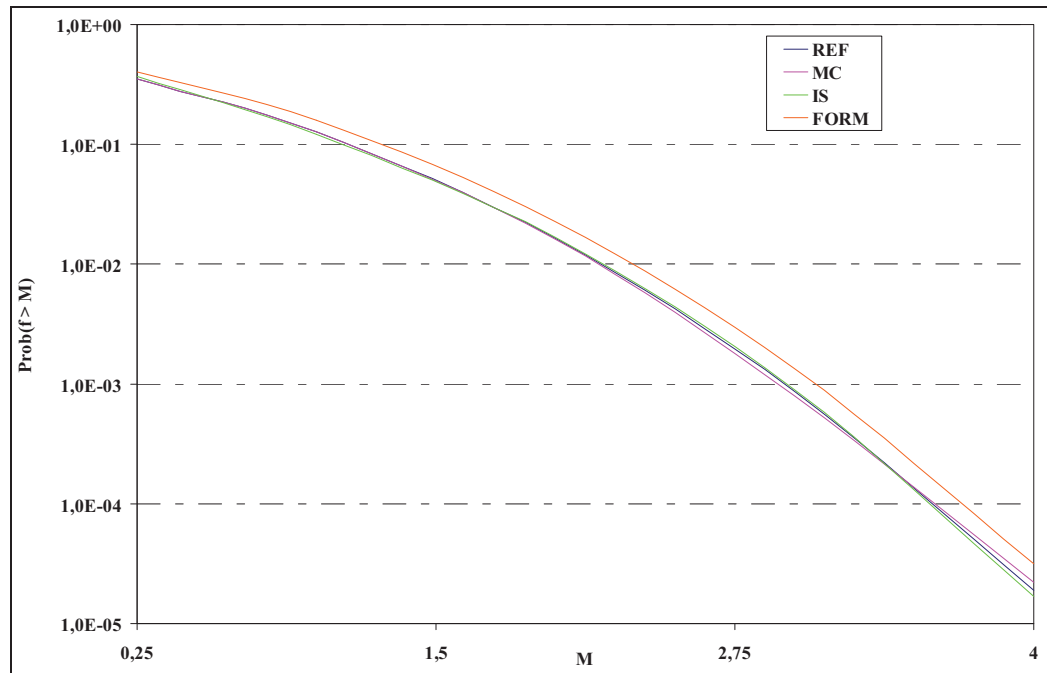


Figure 2.6 *Évolution des méthodes probabilistes, cas  $a = 10^{-2}$ .*

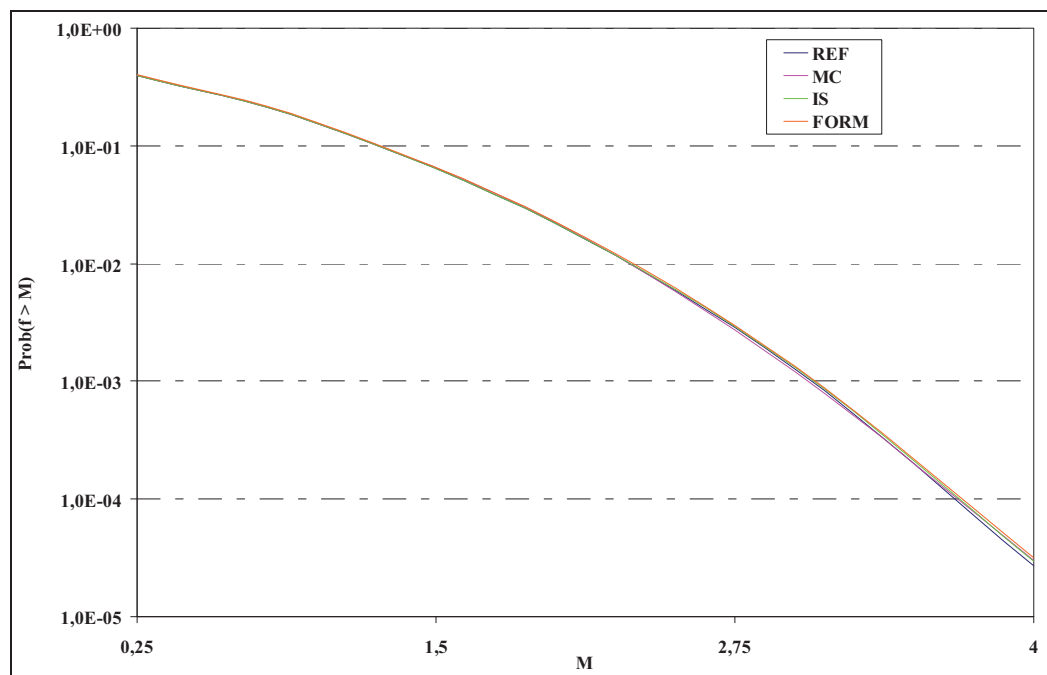


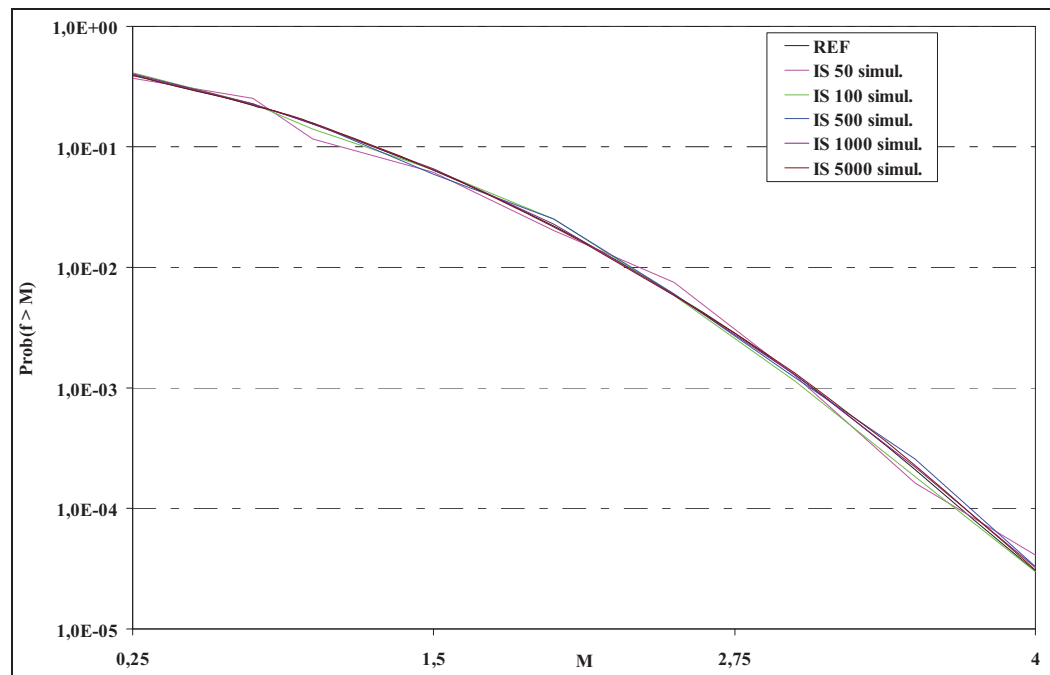
Figure 2.7 *Évolution des méthodes probabilistes, cas  $a = 10^{-3}$ .*

Ces exemples (Figure 2.5 à Figure 2.7), permettent de constater que la précision de la méthode FORM est fortement dépendante aux courbures. En effet plus la fonction d'état limite est courbée au voisinage du point de conception plus la forme approchée du premier ordre est défaillante.

La méthode de tirage d'importance (IS) produit d'excellents résultats sur les exemples précédents. Nous voyons, dans le paragraphe suivant, qu'il est possible d'obtenir des résultats identiques en utilisant un nombre réduit de simulations.

### 2.5.3 Relation entre la courbure et le nombre de simulations dans la méthode de tirage d'importance

Regardons maintenant l'évolution de la méthode de tirage d'importance par rapport au nombre de simulations réalisées et la courbure.



**Figure 2.8** *Évolution de tirage d'importance en fonction du nombre de simulations réalisées au voisinage du point de conception, cas  $a = 10^{-3}$ .*

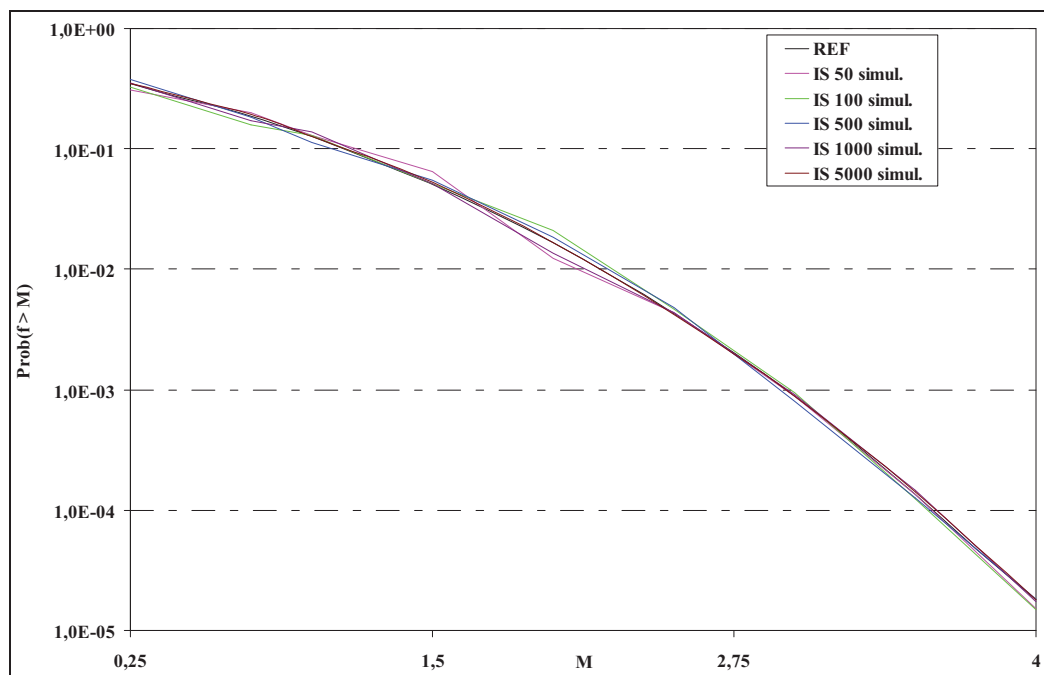


Figure 2.9 *Évolution de tirage d'importance en fonction du nombre de simulations réalisées au voisinage du point de conception, cas  $\alpha = 10^{-2}$ .*

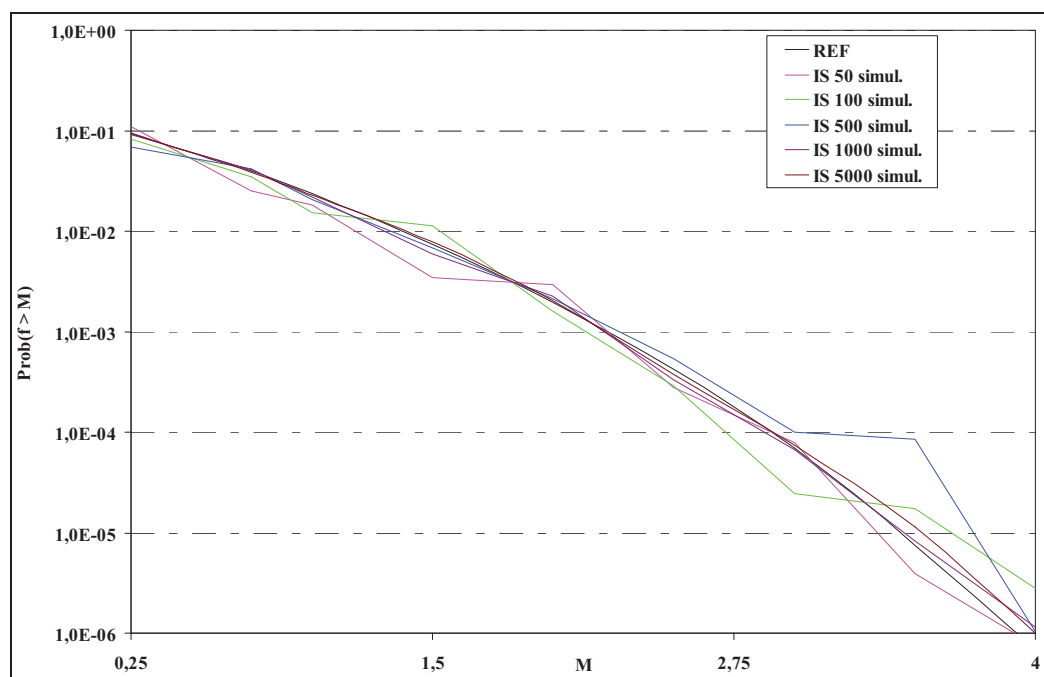


Figure 2.10 *Évolution de tirage d'importance en fonction du nombre de simulations réalisées au voisinage du point de conception, cas  $\alpha = 10^{-1}$ .*



Sur la Figure 2.8 une centaine de simulations suffisent à obtenir une approximation fiable de la probabilité de défaillance, nous constatons qu'en augmentant la courbure, il faut compter plusieurs milliers de simulations pour obtenir un résultat satisfaisant. Il faut noter que la forme de la fonction d'état limite participe à la réduction du nombre de simulations nécessaires à la méthode de tirage d'importance pour l'obtention d'une probabilité correcte.

## 2.6 Conclusion

Nous avons présenté les principales méthodes pour l'évaluation des probabilités. Ces méthodes permettent de traiter efficacement la majorité des problèmes. La méthode de Monté Carlo a l'avantage de pouvoir traiter la majorité des problèmes, il est possible de l'adapter à tous les problèmes quelles que soient les propriétés de la fonction d'état limite. L'efficacité de ces outils dépend grandement du nombre de simulations à réaliser. Pour les problèmes d'hydraulique, les probabilités de défaillance sont généralement très faible ( $10^{-3}$  à  $10^{-6}$ ). Pour une précision satisfaisante des résultats, le coût devient prohibitif.

Les méthodes basées sur la connaissance du point de conception sont les moins onéreuses. Si la méthode FORM est la plus économique, la plus précise semble celle de tirage d'importance. Ces méthodes sont d'autant plus précises que les probabilités sont petites (plus le point de conception est de norme élevée et plus faible est la probabilité associée). Ces approches peuvent donner une fausse estimation de la probabilité de défaillance si le point de conception est un minimum local, ou bien s'il existe plusieurs minimums. Il faut donc s'assurer que l'on a bien un seul minimum du problème. Il faut noter aussi que la précision de ces approches est dépendante de l'intensité des courbures. En règle générale, ces formules sont d'autant plus efficaces que les courbures sont importantes.

## CHAPITRE 3

### COUPLAGE FIABILITÉ ET ÉLÉMENTS FINIS OU VOLUMES FINIS

#### 3.1 Problématique

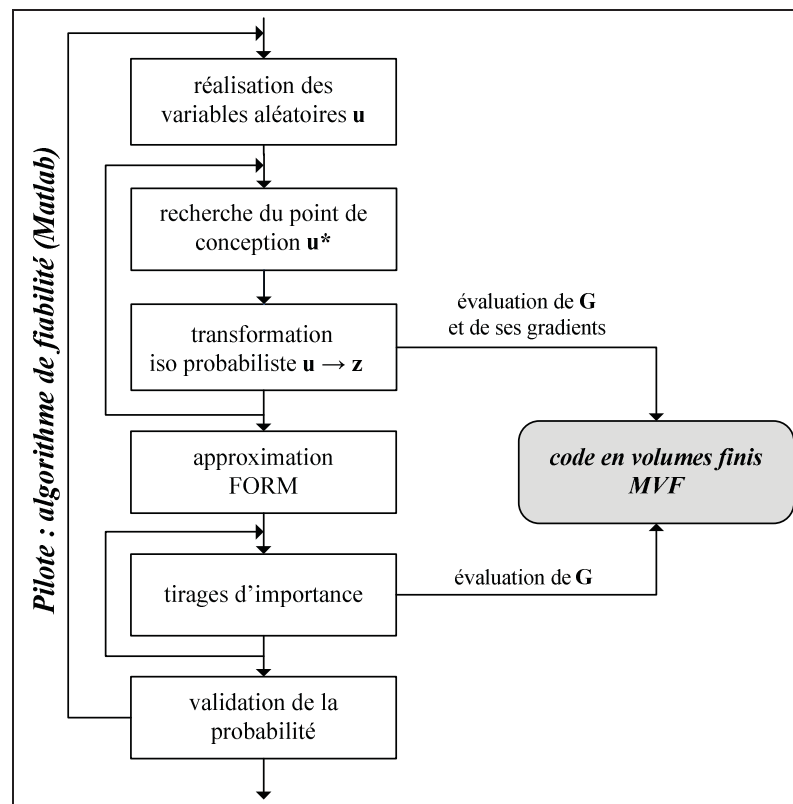
Dans le chapitre précédent, l'analyse de la fiabilité s'appuyait sur une formulation explicite de la fonction d'état  $G$ . Dans le cas d'une modélisation numérique d'un écoulement, ce n'est plus le cas. Seules des réalisations ponctuelles de cette fonction peuvent être obtenues par des moyens numériques, le plus souvent par éléments finis ou volumes finis.

L'association des méthodes de fiabilité et des simulations par volumes finis constitue ce que l'on appelle un couplage mécano-fiabiliste. L'enjeu est alors d'assurer un dialogue entre les deux outils numériques employés pour chacun de ces aspects :

- code probabiliste : définition des réalisations du vecteur des variables aléatoires  $z$ , transformation iso probabiliste, validation des pas de calcul et de la convergence pour l'obtention du point de conception  $u^*$ , calcul des indicateurs de fiabilité ;
- code éléments finis ou volumes finis (MVF) : évaluations de  $G$  et de ses gradients.

Pour réaliser ce couplage, deux approches sont possibles. La première consiste en un couplage direct (Lemaire et al., 2005) dans lequel le code fiabiliste fait appel au code volumes finis pour chaque évaluation de la fonction d'état. Le calcul des dérivées premières et secondes nécessaires aux algorithmes d'optimisation se fait quant à lui par des méthodes numériques. Cette démarche (Figure 3.1), la plus simple à mettre en œuvre, demeure bien adaptée tant que le nombre de variables aléatoires est relativement réduit et que l'évaluation de la fonction d'état  $G$  reste aisée. Pour des problèmes comportant de nombreuses variables incertaines ou mettant en jeu des comportements mécaniques fortement non linéaires ou enfin lorsque l'estimation numérique des gradients peut conduire à des erreurs, il est recommandé de se tourner vers la seconde procédure de couplage basée sur une

représentation approchée explicite de la fonction  $G$  : méthode de surface de réponse (Faravelli, 1989), réseaux de neurones (Haykin, 1999). Dans notre cas, l'approche directe peut suffire.



**Figure 3.1** *Organigramme d'un couplage direct.*

Le calcul de la fiabilité peut être ramené à un problème d'optimisation à résoudre dans l'espace normé. Le point de défaillance le plus probable est le point le plus proche de l'origine appartenant à la surface d'état limite. Dans un module d'optimisation MVF, les variables sont physiques et non normées. De même la fonction d'état limite est connue uniquement dans l'espace physique  $G(z)$ , le problème d'optimisation s'écrit alors sous la forme :

$$\text{minimiser: } \|u\|^2 \quad \text{sous la contrainte: } H(u) = 0$$

Il est clair que ce genre de problème ne peut être résolu correctement pour deux raisons : la première est que le problème est défini en fonction de deux types de variables  $u_i$  et  $z_i$  appartenant respectivement aux espaces normé et physique, et la deuxième est que les variables  $u_i$  et  $z_i$  ne sont pas indépendantes, elles sont reliées par la transformation iso probabiliste  $T$ . Pour résoudre ces difficultés, nous introduisons des contraintes supplémentaires qui représentent les relations  $T_i$  (car il n'y a plus qu'un seul type de variables  $z_i$ ). Le nouveau problème d'optimisation à la forme suivante :

$$\text{minimiser : } \|u\|^2 \quad \text{sous la contrainte : } H(u) = 0 \quad \text{et : } u_i - T_i(z_i) = 0 \quad (3.1)$$

Nous avons vu que la résolution de ce problème d'optimisation utilise le gradient et la hessienne de la fonction d'état limite. Le gradient va être calculé numériquement par un schéma de différences finies. Nous sommes dans la situation où la fonction à dériver se présente comme la composition d'une fonction qui n'est pas analytiquement explicite et d'une transformation iso probabiliste connue :

$$\frac{\partial H(u)}{\partial u_i} = \frac{\partial G(z)}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial u_i} = \frac{\partial G(z)}{\partial z_i} \frac{\partial T^{-1}(u_i)}{\partial u_i} \quad (3.2)$$

On approche les deux termes par une formule simple de différences finies :

$$\frac{\partial G(z)}{\partial z_i} \approx \frac{G(z_1, \dots, z_i + \delta z_i, \dots, z_n) - G(z_1, \dots, z_i, \dots, z_n)}{\delta z_i} + O(\delta z_i^2) \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial T^{-1}(u_i)}{\partial u_i} \approx \frac{T^{-1}(u_i + \delta u_i) - T^{-1}(u_i)}{\delta u_i} \quad (3.4)$$

Lorsque  $\delta z_i$  tend vers zéro, les termes du premier ordre tendent vers les valeurs exactes des dérivées partielles. La difficulté réside dans le choix du pas  $\delta z_i$ . Il doit être assez grand pour

qu'un nombre significatif de décimales soit modifié et suffisamment petit pour rester dans le cadre des calculs de variations. On peut, par exemple, choisir  $\delta z_i = \varepsilon |z_i|$  avec  $\varepsilon \in [10^{-3}, 10^{-2}]$ .

Pour le calcul de la hessienne, en reprenant le principe de dérivation qui nous a permis d'obtenir une expression du gradient dans l'espace gaussien, chaque terme de la hessienne dans l'espace gaussien est donné par :

$$\frac{\partial^2 H(u)}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial^2 G(z)}{\partial z_i \partial z_j} \frac{\partial T^{-1}(u_i)}{\partial u_i} \frac{\partial T^{-1}(u_j)}{\partial u_j} + \delta_{ij} \frac{\partial G(z)}{\partial z_j} \frac{\partial^2 T^{-1}(u_i)}{\partial u_i^2} \quad (3.5)$$

$\delta_{ij}$  représente le symbole de Kronecker qui vaut 1 lorsque  $i = j$  et 0 sinon.

Les dérivées secondes de la fonction d'état limite dans l'espace physique et les dérivées secondes des termes portant sur la transformation iso probabiliste sont aussi explicitées par différences finies d'ordre deux :

$$\frac{\partial^2 G(z)}{\partial z_i \partial z_j} \approx \frac{G(z_1, \dots, z_i + \delta z_i, \dots, z_j + \delta z_j, \dots, z_n) - G(z_1, \dots, z_i, \dots, z_j + \delta z_j, \dots, z_n) - G(z_1, \dots, z_i + \delta z_i, \dots, z_j, \dots, z_n) + G(z_1, \dots, z_i, \dots, z_j, \dots, z_n)}{\delta z_i \delta z_j} \quad (3.6)$$

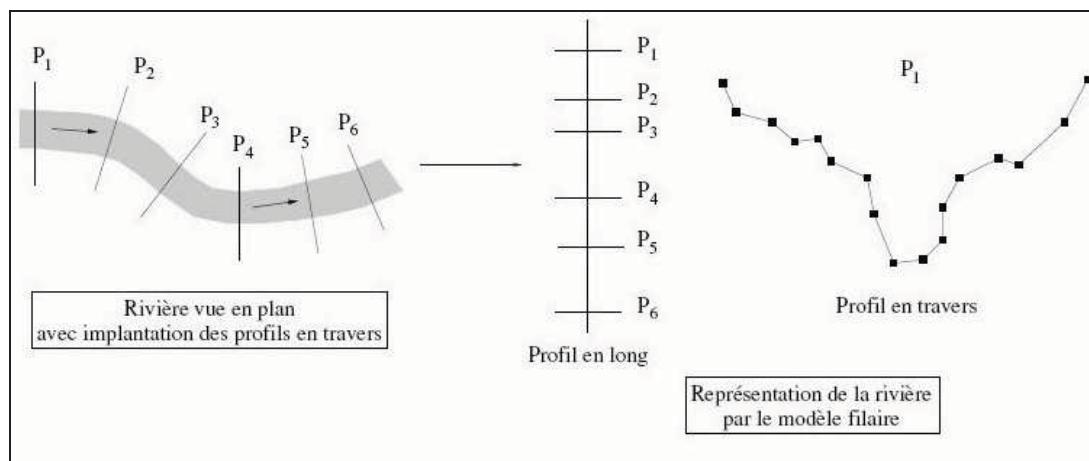
$$\frac{\partial^2 T^{-1}(u_i)}{\partial u_i^2} \approx \frac{T^{-1}(u_i + 2\delta u_i) - T^{-1}(u_i + \delta u_i) + T^{-1}(u_i)}{\delta u_i^2} \quad (3.7)$$

La matrice hessienne étant symétrique, seule la moitié des termes sont à calculer. Le calcul par différences finies représente  $2n(n+1)$  appels à la fonction d'état limite ( $n$  est le nombre de variables aléatoires).

### 3.2 Le modèle hydraulique unidimensionnel : Mascaret

Le logiciel Mascaret (Goutal et Maurel, 2002) est un code de volumes finis de modélisation hydraulique unidimensionnelle à surface libre, basé sur les équations de Saint-Venant dont le cœur du système est codé en Fortran 90. Il permet d'effectuer des calculs pour des écoulements aussi bien fluviaux que transcritiques, en régime permanent ou non permanent. Ainsi, son champ d'application couvre de nombreux cas d'études comme les propagations de crues et la modélisation des champs d'inondations, les ondes de submersion résultant de rupture d'ouvrages hydrauliques, les régulations de rivières et les propagations d'ondes dans les canaux (intumescences, écluses, mise en eau).

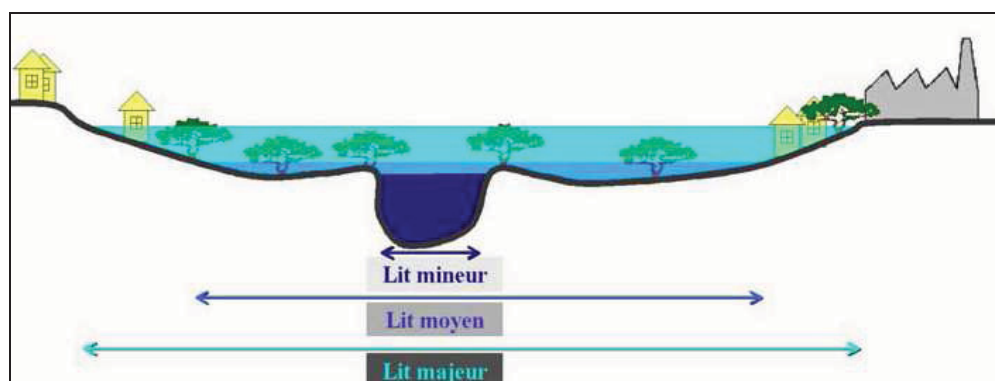
Mascaret repose sur une représentation géométrique de la rivière sous forme de profils en travers repérés par leur abscisse curviligne sur un profil en long (Figure 3.2). Dans cette approche, l'écoulement est considéré canalisé, i.e. organisé suivant une direction préférentielle appelée axe d'écoulement, invariante au cours du temps.



**Figure 3.2** *Représentation d'un cours d'eau par un modèle unidimensionnel.*  
Tirée de Roux (2004, p. 64)

La modélisation hydraulique unidimensionnelle est très pertinente pour des écoulements débordant peu du lit mineur (Weber & Menéndez, 2004). Les résultats restent satisfaisants lorsque le débordement est important, à condition que la plaine d'inondation ne présente pas

de trop fortes singularités, comme des obstacles transversaux, et que la topologie de la rivière n'évolue pas avec le débit : coupure de méandres, écoulement dans des bras normalement à sec (Roux, 2004).



**Figure 3.3** *Représentation schématique des lits mineur, moyen et majeur.*  
Tirée de Hostach (2006, p. 122)

La condition initiale définit la configuration hydraulique de la plaine (valeurs des caractéristiques hydrauliques : débit, vitesses et hauteurs) à l'instant de départ du calcul (Bates & Anderson, 1996). En général, la configuration initiale de la plaine n'est pas connue en tout point du maillage du modèle.

Les conditions aux limites définissent les caractéristiques hydrauliques aux limites du domaine de calcul (zones d'apport et de fuite des écoulements). Sans fuites et apports latéraux (autres que ceux de la rivière principale), ces caractéristiques hydrauliques peuvent être l'évolution temporelle des hauteurs d'eau (limnigrammes), des vitesses, des débits (hydrogrammes) ou des relations entre ces variables dans les sections amont et aval du modèle (courbe de tarage).

Il est également nécessaire de connaître la rugosité (coefficient de Strickler) en chacun des points de calcul (Werner et al., 2005). Cependant, cette information est rarement disponible car il est peu envisageable de mettre en œuvre des campagnes de mesure de coefficient de Strickler pour chaque maille du modèle. Par ailleurs, selon le type de schéma d'écoulement et

le modèle hydraulique utilisé, le coefficient de frottement peut prendre une signification différente et la sensibilité du modèle à ce coefficient peut être variable (Horritt et Bates, 2002). En conséquence, dans une procédure de calage d'un modèle hydraulique, selon le schéma d'écoulement et le modèle utilisé, les valeurs calées ne seront pas nécessairement les mêmes. Dans les modèles hydrauliques anglo-saxons, le coefficient de frottement est plus souvent représenté par le coefficient de Manning  $n$ , qui n'est autre que l'inverse du coefficient de Strickler.

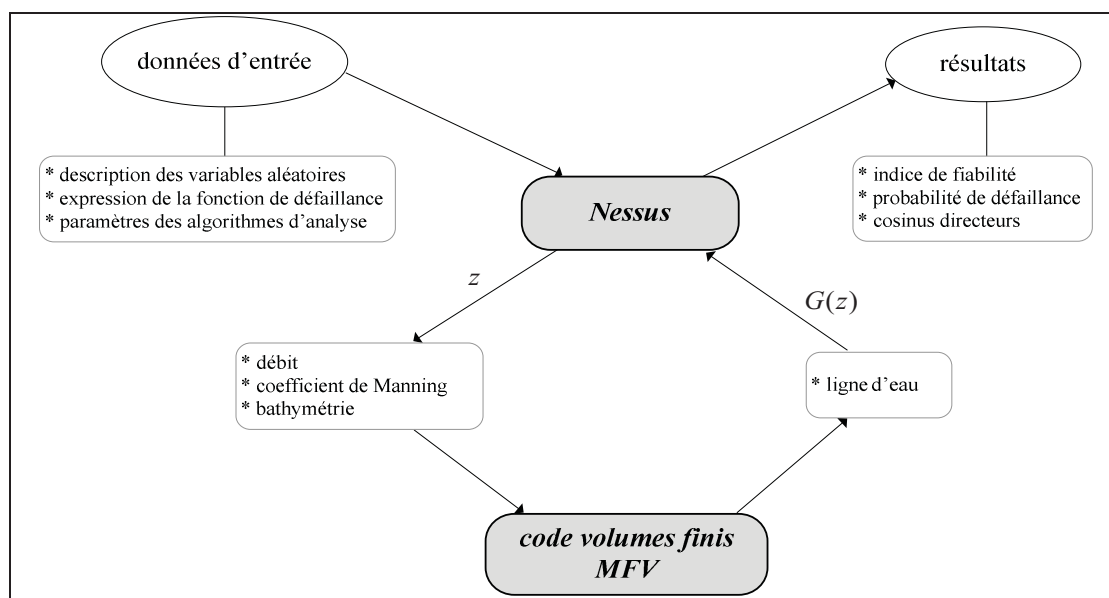
### **3.3 Le logiciel de simulation probabiliste : Nessus**

Pour valider le code fiabiliste développé dans ce mémoire, notre choix s'est porté sur le code de calcul Nessus (Numerical Evaluation of Stochastic Structures Under Stress) (Riha et al., 2002), reconnu par la communauté fiabiliste, développé et commercialisé par SWRI (Southwest Research Institute, San Antonio, Texas, USA).

Nous avons choisi donc de mettre en place un autre couplage direct entre le code fiabiliste Nessus et les codes volumes finis de modélisation hydraulique utilisés (HAPI1D ou Mascaret). Les différentes étapes du couplage entre Nessus et le code volumes finis sont résumées sur la Figure 3.4. Comme auparavant, la première étape consiste en la déclaration au sein de Nessus des variables aléatoires du modèle (lois de distribution et paramètres associés), de la fonction d'état limite  $G$  et de tous les paramètres indispensables à la résolution du calcul fiabiliste. À partir de ces informations, ce code probabiliste peut générer les réalisations du vecteur  $z$  des variables aléatoires.

Faisant appel au code par volumes finis, on déduit la ligne d'eau. Nessus dispose alors de l'ensemble des informations pour évaluer la quantité  $G(z)$ . Ces différentes étapes sont répétées jusqu'à la convergence de l'algorithme d'optimisation pour l'obtention de  $u^*$ . L'analyse fiabiliste est ensuite effectuée à l'aide des méthodes FORM, SORM, tirage d'importance, Monté Carlo ou surface de réponse.





**Figure 3.4** *Couplage Nessus – Code de volumes finis.*

## CHAPITRE 4

### AMÉLIORATION DE PERFORMANCES DES ALGORITHMES PROBABILISTES

#### 4.1 Introduction

Différentes méthodes pour estimer la fiabilité ont été présentées. L'efficacité de ces méthodes peut être comprise comme leur aptitude à converger vers un résultat stable quelles que soient les conditions d'utilisation : complexité physique et précision du modèle mécanique, précisions imposées dans les algorithmes probabilistes (sur la fonction d'état, sur l'indice de fiabilité, sur la distance entre deux points de conception successifs), nombre de variables aléatoires considérées, intensité des courbures, etc. Le temps de calcul reste par ailleurs un critère important dans le calcul de fiabilité. La méthode de simulation de Monté Carlo permet d'estimer correctement la fiabilité et de contrôler la validité des résultats obtenus par d'autres méthodes, mais elle peut être très coûteuse en temps de calcul si la probabilité de défaillance recherchée est faible ( $<10^{-2}$ ), si le problème est complexe ou si une expérience est représentée par un calcul éléments finis.

La question du développement d'outils permettant de minimiser le temps de calcul pour l'évaluation probabiliste sans dégradation de la qualité des résultats reste donc d'actualité. Nous proposons, dans ce chapitre, de développer un algorithme probabiliste basé sur l'indice de fiabilité répondant à la question.

Dans le chapitre 2, nous avons présenté l'algorithme Rackwitz-Fiessler (HLRF) pour déterminer l'indice de fiabilité d'Hasofer-Lind  $\beta_{HL}$  (§ 2.1.7). Cet algorithme est une adaptation de la méthode du gradient projeté au problème d'optimisation en fiabilité mécanique, dans laquelle le calcul de  $\beta_{HL}$  est un problème d'optimisation sous contrainte. La fonction à minimiser est la distance euclidienne dans l'espace standardisé. L'algorithme HLRF résout itérativement le problème en générant une suite de points qui converge vers une

solution optimale. Le point de défaillance le plus probable (ou point de conception) est obtenu par itérations successives lorsque les précisions souhaitées sur la fonction d'état et sur deux points consécutifs de l'algorithme sont obtenues.

L'algorithme HLRF est l'algorithme de Newton le plus simple, on émet l'hypothèse que la dérivée seconde de la fonction d'état est négligeable. La convergence globale de cet algorithme n'est pas assurée, et il faut souvent essayer plusieurs points de départ pour obtenir la convergence vers un point optimal. C'est un algorithme très utilisé dans les codes commerciaux.

Avec les méthodes quasi-Newton, on généralise la formule itérative de Newton. Le principe des méthodes de résolution de type quasi-Newton est de générer une séquence de matrices symétriques définies positives qui soient des approximations, toujours améliorées, de la matrice de la dérivée seconde de la fonction d'état ou de son inverse.

## 4.2 Algorithme quasi-Newton (BFGS)

Le problème d'optimisation non-linéaire s'écrit :

$$\text{minimiser: } \|u\|^2 \quad \text{sous la contrainte: } H(u) = 0$$

qui est équivalent à la minimisation du Lagrangien :  $L(u, \lambda) = \|u\|^2 + \lambda H(u)$ , où  $\lambda$  est le multiplicateur de Lagrange.

Pour cela appliquons les conditions d'optimalité de Kuhn, Karush et Tucker :

$$F(u, \lambda) = \begin{pmatrix} \nabla_u L(u, \lambda) = 2u + \lambda \nabla H(u) \\ \nabla_\lambda L(u, \lambda) = H(u) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.1)$$

Puisque  $H(u)$  est une fonction, en général non linéaire, nous appliquons la méthode de Newton :

$$F(u^{(k)}, \lambda^{(k)}) + \nabla F(u^{(k)}, \lambda^{(k)}) \begin{pmatrix} u^{(k+1)} - u^{(k)} \\ \lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.2)$$

avec :

$$\nabla F(u^{(k)}, \lambda^{(k)}) = \begin{bmatrix} 2I + \lambda^{(k)} \nabla^2 H(u^{(k)}) & \nabla H(u^{(k)}) \\ \nabla H(u^{(k)})^T & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

où  $I$  est la matrice identité.

On pose :

$$B^{(k)} = \begin{bmatrix} 2I + \lambda^{(k)} \nabla^2 H(u^{(k)}) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

du système (4.2) on obtient :

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \frac{H(u^{(k)}) - \nabla H(u^{(k)})^T [B^{(k)}]^{-1} (2u^{(k)} + \lambda^{(k)} \nabla H(u^{(k)}))}{\nabla H(u^{(k)})^T [B^{(k)}]^{-1} \nabla H(u^{(k)})} \quad (4.5)$$

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} - [B^{(k)}]^{-1} (2u^{(k)} + \lambda^{(k+1)} \nabla H(u^{(k)})) \quad (4.6)$$

Cet algorithme est robuste et sa vitesse de convergence est quadratique lorsque la solution initiale est au voisinage de l'optimum (Dennis et Schnabel, 1996). De manière schématique on a besoin d'effectuer plusieurs calculs numériques selon la séquence suivante :

$$u^{(k)} \rightarrow H(u^{(k)}) \rightarrow \nabla H(u^{(k)}) \rightarrow \nabla^2 H(u^{(k)})$$

Pour nos applications, la fonction d'état limite n'est connue que numériquement en faisant appel à un code volumes finis (HAPI1D ou Mascaret). Les calculs du gradient et de la matrice hessienne ne peuvent se réaliser alors que numériquement. Ainsi  $d^{(k)}$  ( $d^{(k)} = u^{(k+1)} - u^{(k)}$ ) n'est pas forcément une direction de descente, elle l'est si la matrice hessienne est définie positive. En effet, la matrice hessienne est à calculer (et inverser) à chaque itération, l'application de la méthode des différences finies (formules (3.3) et (3.6)) peut engendrer des erreurs numériques importantes. Les méthodes de quasi-Newton tentent d'éviter ces inconvénients, le principe est de remplacer la matrice hessienne par une matrice beaucoup plus simple.

Entre la multitude des algorithmes de quasi-Newton, la différence principale est donc le choix d'approximation de la matrice hessienne et sa mise à jour. La formule de correction qui permet d'obtenir  $\tilde{\nabla}^2 H(u^{(k+1)})$  à partir de  $\tilde{\nabla}^2 H(u^{(k)})$  utilise les informations nouvelles obtenues lors de l'itération  $k+1$ , c'est-à-dire les valeurs du gradient en ce point :

$$\tilde{\nabla}^2 H(u^{(k+1)}) = \tilde{\nabla}^2 H(u^{(k)}) + W^{(k)} \quad (4.7)$$

Actuellement, l'unanimité est faite autour d'une formule trouvée indépendamment par Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno (BFGS), (Broyden, 1970; Fletcher, 1970; Goldfarb, 1970; Shanno, 1970) :

$$W^{(k)} = \frac{y^{(k)} y^{(k)T}}{y^{(k)T} d^{(k)}} - \frac{\tilde{\nabla}^2 H(u^{(k)}) d^{(k)} d^{(k)T} \tilde{\nabla}^2 H(u^{(k)})}{d^{(k)T} \tilde{\nabla}^2 H(u^{(k)}) d^{(k)}} \quad (4.8)$$

avec :

$$d^{(k)} = u^{(k+1)} - u^{(k)} \quad \text{et} : \quad y^{(k)} = \nabla H(u^{(k+1)}) - \nabla H(u^{(k)})$$

### 4.2.1 Résumé de l'algorithme

L'algorithme est résumé par les étapes suivantes :

1. Initialiser la matrice hessienne  $\tilde{\nabla}^2 H(u^{(1)})=0$  et le multiplicateur de Lagrange  $\lambda^{(1)}=0$  ( $k=1$ );
2. Choisir un point de départ  $u^{(1)}$ , généralement l'origine du repère en l'absence d'informations spécifiques;
3. Évaluer la fonction d'état-limite  $H(u^{(k)})$ ;
4. Calculer le gradient de l'état-limite  $\nabla H(u^{(k)})$  et sa norme  $\|\nabla H(u^{(k)})\|$ ;
5. Calculer  $\lambda^{(k+1)}$  par la relation (4.5);
6. Calculer le nouveau point  $u^{(k+1)}$  par la relation (4.6);
7. Évaluer la fonction d'état-limite  $H(u^{(k+1)})$ ;
8. Calculer le nouveau gradient de l'état-limite  $\nabla H(u^{(k+1)})$  et sa norme  $\|\nabla H(u^{(k+1)})\|$ ;
9. Calculer l'indice de fiabilité  $\beta^{(k+1)} = - (u^{(k+1)})^T \frac{\nabla H(u^{(k+1)})}{\|\nabla H(u^{(k+1)})\|}$ ;
10. Estimer la matrice hessienne  $\tilde{\nabla}^2 H(u^{(k+1)})$  par la méthode BFGS (4.7) et (4.8);
11. Test de positivité de la matrice hessienne du système : vérifier si  $B^{(k+1)} > 0$   
sinon  $B^{(k+1)} = B^{(k)}$ ;
12. Test de convergence : si  $|H(u^{(k+1)})| \leq \varepsilon_H$  et  $\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\| \leq \varepsilon_u$ , arrêter le calcul;  
sinon mettre  $k = k+1$  et aller à 5.

### 4.3 Comparaison de la méthode proposée BFGS avec des méthodes antérieures et le logiciel fiabiliste Nessus

La comparaison est réalisée sur un écoulement dans un canal rectangulaire de 25 m de longueur et de 1 m de largeur, avec une bosse de forme parabolique, de hauteur 0.2 m, située entre les abscisses 8 m et 12 m à partir de l'amont (CETMF, 2007). Les critères de comparaison entre les différentes méthodes sont le nombre de calculs de la fonction d'état limite  $N$  (indicateur du temps de calcul associé à la méthode) et la valeur de la probabilité de défaillance  $P_f$ .

Nous étudions la surverse possible au-dessus d'une hauteur de la bosse. La fonction d'état limite est définie par :

$$G(z) = h_0 - g(z), \quad z = (Q, n) \quad (4.9)$$

Avec  $h_0$  est l'élévation du seuil au dessus de la bosse et  $g(z)$  le niveau d'eau au dessus de la bosse calculé par le code volumes finis HAPI1D (Tchamen, 2006) en fournissant le débit  $Q$  et le coefficient de Manning  $n$ . La défaillance se produit lorsque le niveau d'eau est supérieur à l'élévation du seuil  $h_0$ .

Le code volumes finis détermine la solution du problème par l'imposition d'un débit à l'entrée et un niveau  $H_{out}$  à la sortie. La Figure 4.1 superpose, sur un même graphique, les profils associés aux débits : 1, 2 et 3.5 m<sup>3</sup>/s. La Figure 4.2 présente les profils du nombre de Froude, cette figure montre que les deux premiers débits (1 et 2 m<sup>3</sup>/s) déterminent un écoulement à régime fluvial et que le dernier débit (3.5 m<sup>3</sup>/s) produit un régime torrentiel sur la face aval de la bosse avant l'apparition d'un ressaut hydraulique qui permet au profil de rejoindre le niveau imposé  $H_{out} = 0.42$  m à la frontière aval.

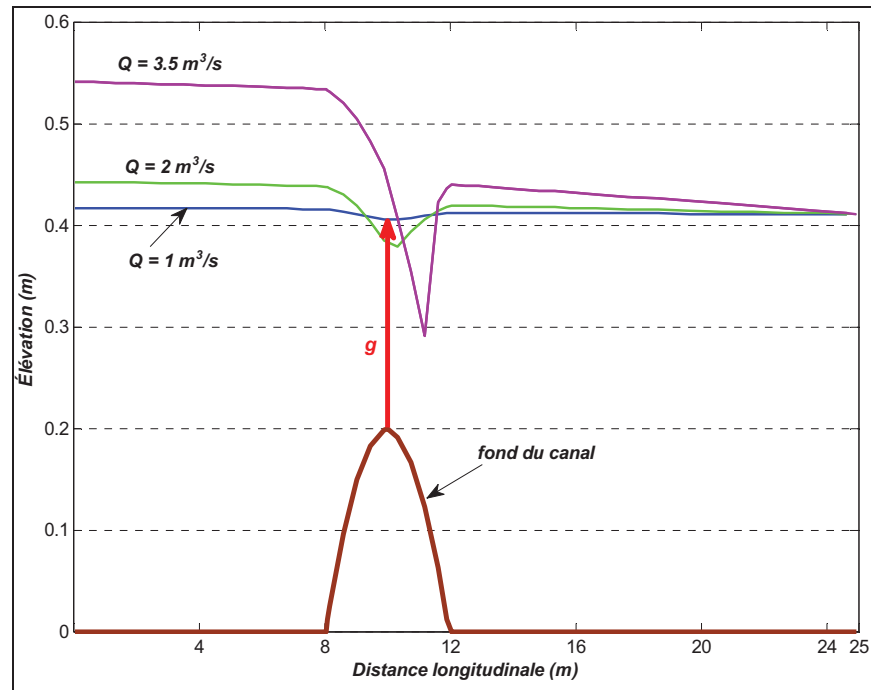


Figure 4.1 Profil en long du canal et profils de la surface libre pour différents débits.

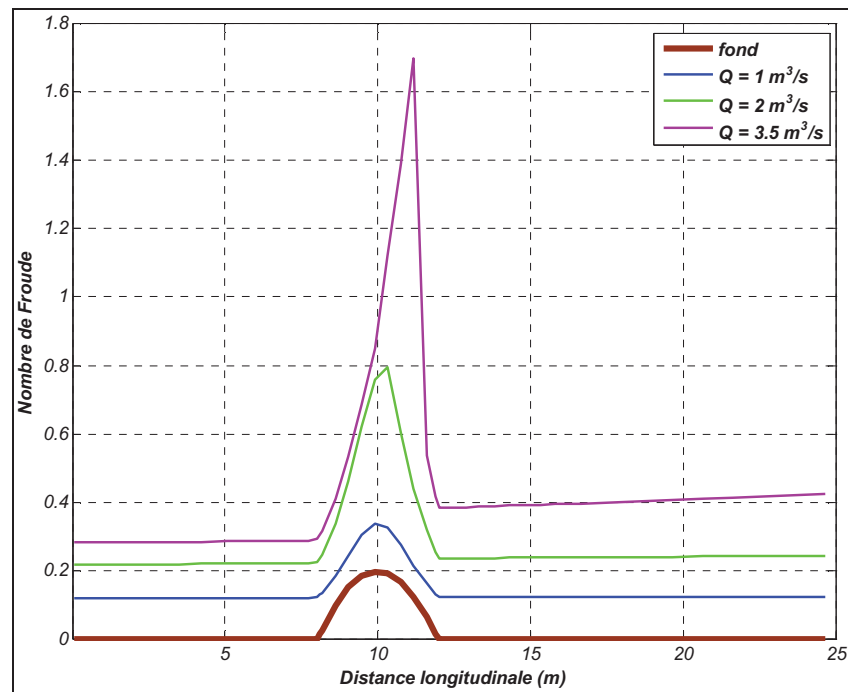


Figure 4.2 Profils du nombre de Froude pour différents débits.



La fonction d'état limite est définie par deux variables aléatoires : le débit  $Q$  et le coefficient de Manning  $n$ , dont les caractéristiques sont données dans le Tableau 4.1.

Tableau 4.1 Caractéristiques des variables aléatoires d'entrée

variable	loi de distribution	$\mu$	$\sigma$	$c_v$
débit ( $\text{m}^3/\text{s}$ )	normale	1.8	0.5	27%
Manning ( $\text{m}^{-1/3}.\text{s}$ )	normale	0.03	0.01	33%

Les précisions numériques utilisées dans la méthode BFGS sont  $\varepsilon_H = 10^{-3}$  et  $\varepsilon_u = 5 \times 10^{-3}$ . Les résultats obtenus sont présentés dans les Tableau 4.2 et Tableau 4.3.

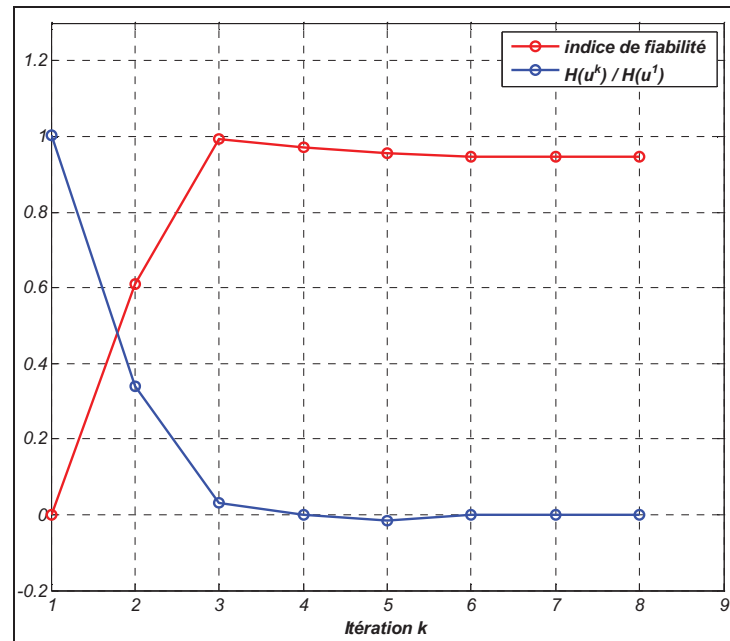
Le Tableau 4.2 montre que la méthode BFGS est la plus efficace en terme de convergence et en terme de nombre d'appels à la fonction d'état limite.

Tableau 4.2 Nombre de calculs de la fonction d'état limite obtenus par différentes méthodes et pour différents seuils  $h_0$

$h_0$ (m)	0.37	0.38	0.40	0.41	0.42	0.43
Monté Carlo	503	702	1003	1271	3245	10654
Nessus (SORM)	608	14	29	31	37	33
Nessus (FORM)	602	8	23	24	28	26
HLRF	×	75	45	×	×	40
Newton (différences finis)	×	35	148	91	×	×
BFGS	45	12	24	27	33	33

(×) : Ne converge pas.

La Figure 4.3 illustre l'évolution de l'indice de fiabilité  $\beta$  et de la valeur de la fonction d'état limite pour des itérations successives.



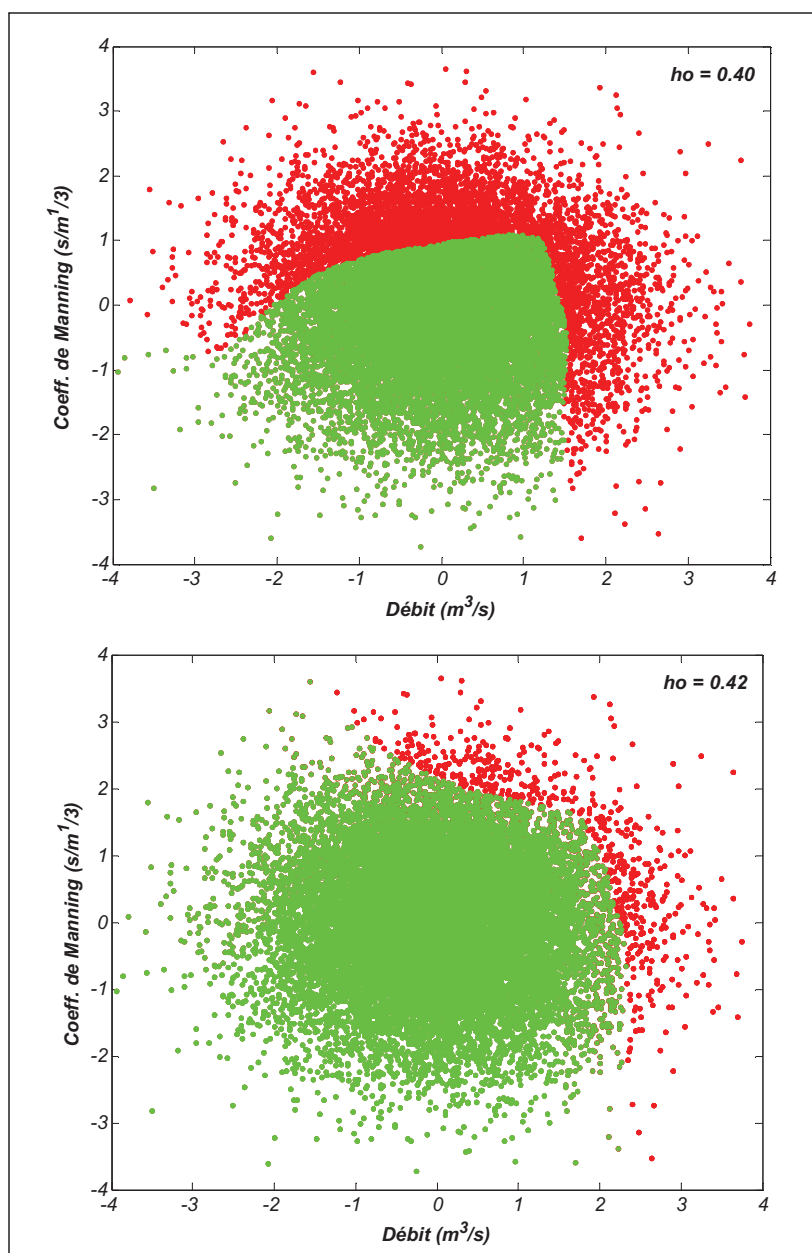
**Figure 4.3** Convergence de l'indice de fiabilité  $\beta$  et de la fonction état limite (BFGS,  $h_0 = 0.40$  m).

Le Tableau 4.3 montre que les valeurs de la probabilité de défaillance déterminées par l'approximation FORM (que ce soit avec l'algorithme BFGS, HLRF ou Newton) correspondent aux valeurs déterminées par le code commercial Nessus, la probabilité de défaillance est sensiblement la même pour les deux codes. En terme de précision ces résultats diffèrent significativement des résultats obtenus par la simulation de Monté Carlo.

**Tableau 4.3** Probabilité de défaillance obtenue par différentes méthodes et pour différents seuils  $h_0$

$h_0$ (m)	0.40	0.41	0.42	0.43
Monté Carlo	0.2535	0.0894	0.0330	0.0103
Nessus (SORM)	0.1784	0.0554	0.0185	0.0069
Nessus (FORM)	0.1724	0.0616	0.0213	0.0075
BFGS (FORM)	0.1724	0.0616	0.0214	0.0073

En effet, à partir des courbes des simulations de Monté Carlo (50000 simulations), nous avons remarqué que la fonction d'état limite peut avoir deux minimums (Figure 4.4). Il est alors essentiel, pour la précision des méthodes expérimentées, de déterminer ces points significatifs. Ceci montre que l'hypothèse de linéarisation du domaine d'intégration au minimum absolu (FORM), émise dans le cas de Nessus, est fausse dans ce test et donc il y a un autre minimum à ne pas négliger.



**Figure 4.4** *Fonction d'état limite, cas de deux minimums.*

Pour déterminer le deuxième point de conception, deux approches sont possibles :

- essayer différents points de départ, en espérant que l'algorithme d'optimisation converge vers deux solutions distinctes;
- perturber la fonction d'état limite au voisinage du point de conception déjà mis en évidence, ce qui revient à imposer des barrières autour du point de conception déterminé afin de l'exclure.

Nous avons opté pour la deuxième approche (§ 2.3.1). Dans ce cas nous avons repéré une autre solution (Tableau 4.4).

Tableau 4.4 Probabilité de défaillance obtenue par différentes méthodes et pour différents seuils  $h_0$

$h_0$ (m)	$u_1^*$ seul	$u_2^*$ seul	$u_1^*$ et $u_2^*$	
	FORM	FORM	Multi-FORM	Monté Carlo
0.40	0.1724	0.0820	0.2544	0.2535
0.41	0.0616	0.0375	0.0991	0.0894
0.42	0.0214	0.0147	0.0361	0.0333
0.43	0.0073	0.0049	0.0122	0.0103

Les résultats de la table 4.4 montrent que la méthode BFGS couplée avec l'approximation Multi-FORM (linéarisation de la fonction d'état limite en deux points de conception) donne sensiblement les mêmes résultats que la méthode de Monté Carlo en termes de probabilité de défaillance. Les résultats du code commercial Nessus sont erronés pour ce test. Le code Nessus ne dispose d'aucune possibilité aux approximations Multi-FORM ou Multi-SORM.

### 4.3.1 Conclusion sur la comparaison

L'exemple traité dans cette comparaison a montré l'intérêt de la méthode développée BFGS en termes de convergence ainsi qu'en termes de temps de calcul (nombre d'appels à la fonction d'état limite). Les résultats obtenus sont dans l'ensemble meilleurs que ceux provenant des méthodes précédemment présentées dans la littérature. Les résultats comparés montrent que l'approximation FORM peut donner une fausse estimation de la probabilité de défaillance si le point de conception est un minimum local, ou bien s'il existe plusieurs minimums. Il faut donc s'assurer que l'on a bien un seul minimum du problème, pour ce faire on peut effectuer des tirages d'importance autour du point de conception  $u^*$  trouvé et observer la convergence de la probabilité de défaillance  $P_f$ .

## 4.4 Remarques et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthode probabiliste efficace pour évaluer la fiabilité, la méthode BFGS, c'est une amélioration de l'algorithme Rackwitz-Fiessler (HLRF). Elle permet l'estimation efficace de la matrice hessienne dans le cas où le modèle associé à la fonction d'état limite peut être défini avec un code élément finis ou volumes finis. La méthode est validée sur un exemple d'écoulement résolu par un code aux volumes finis. Elle montre bien son efficacité en termes de convergence, en termes de précision et en termes de temps de calcul par rapport aux autres méthodes. Par la suite, cette méthode est utilisée pour mesurer la fiabilité sur des problèmes d'écoulements réels.

## CHAPITRE 5

### APPLICATIONS À DES ÉCOULEMENTS HYDRAULIQUES RÉELS

#### 5.1 Introduction

Ce chapitre apporte des éléments essentiels permettant de cerner l'effet des incertitudes sur la grandeur choisie. Par exemple, l'amélioration de la fiabilité d'une digue de protection nécessite une estimation précise des niveaux d'eau extrêmes qu'atteignent les écoulements hydrauliques sous excitation d'aléa climatique. L'étude aborde deux problèmes souvent rencontrés en modélisation hydrodynamique dans des bassins naturels :

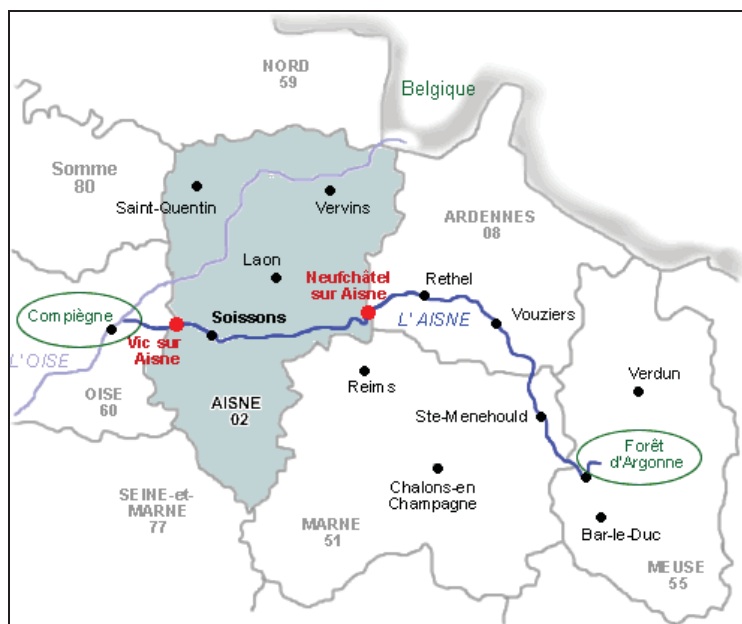
- L'intervalle de confiance à 95% de la ligne d'eau d'une rivière, l'exemple de l'étude porte sur la rivière de l'Aisne en France;
- La probabilité de dépassement de la hauteur d'une digue de protection, il s'agit du mur de protection du village de Saint-Timothée sur le bras nord du fleuve Saint-Laurent.

La pratique courante nous montre que les conséquences de l'utilisation d'un modèle simplifié basé sur une étude hydrologique des écoulements pour dimensionner un ouvrage hydraulique peuvent conduire à une perte de fiabilité ou un surdimensionnement. Ce problème nous conduit à proposer un outil basé sur une approche probabiliste pour dimensionner ces ouvrages. Par rapport aux études existantes, ce travail se distingue par une description et une analyse enrichies des incertitudes mises en jeu dans une modélisation hydrodynamique.

#### 5.2 Application au bassin de l'Aisne

L'exemple d'étude se situe sur la rivière de l'Aisne (France) entre la commune de Soissons (02) et la commune de Vic-sur-Aisne (02) sur une distance d'environ 13 km (CETMF, 2007).

L'Aisne est un affluent de l'Oise qu'elle rejoint à la commune de Compiègne (Figure 5.1), C'est une rivière de plaine aux crues lentes.



**Figure 5.1** *Rivière de l'Aisne.*

Le tronçon de rivière étudié est homogène, il peut donc être assimilé à un bief. Il est décrit par 20 profils. Les profils sont repérés par rapport à l'axe d'écoulement au moyen d'abscisses curvilignes qui suivent les courbes de la rivière. Ces abscisses sont mesurées selon des points kilométriques ou pK. Le tronçon ainsi décrit va du pK 0 au pK 13038,97 m. Il faut noter que les profils ne sont pas espacés régulièrement, par exemple tous les 500 mètres, mais qu'il s'adapte à la configuration du terrain. Le lit mineur est caractérisé par une largeur au miroir de 50 à 80 m tandis que le lit majeur a une largeur variable comprise entre 800 et 1200 m.

### **5.2.1**      **Modèle stochastique**

Dans cette partie, nous allons justifier et construire le modèle stochastique qui permettra l'analyse fiabiliste. Pour cela, nous suivons les différentes étapes décrites dans le chapitre 2.

### 5.2.1.1 Variables aléatoires

La modélisation d'un écoulement hydraulique est affectée par de nombreuses incertitudes, dont il est parfois difficile d'estimer quantitativement les variabilités associées. Même si l'on disposait de ces informations, leur prise en compte intégrale amènerait à une certaine complexité de la formulation. Une simplification concentrée sur des paramètres jugés essentiels et connus expérimentalement s'avère donc indispensable.

Les incertitudes proviennent le plus souvent de la variabilité naturelle des grandeurs physiques (les débits et niveaux aux frontières, la bathymétrie et la topographie sous forme de modèle de terrain, les coefficients de frottement ...), ou aux imperfections des conditions de mesures (non reproductibilité des résultats).

Les sources d'incertitudes retenues dans cette étude sont des incertitudes des paramètres hydrologiques (le débit) et hydrauliques (le coefficient de frottement de Strickler et la bathymétrie). L'ensemble des variables aléatoires retenues sont considérées indépendantes a priori, dans la mesure où l'on ne dispose pas d'informations expérimentales qui permettrait une estimation cohérente de leur éventuelle corrélation. Il reste donc à préciser leur loi de distribution aléatoire.

- **Débit**

Entre sa source et la fin de son parcours, l'Aisne a traversé 353 km et reçu une série d'affluents. La saison des hautes eaux s'étend désormais de décembre à début mai pour des débits mensuels moyens allant de 85 à 120 m<sup>3</sup>/s, avec un maximum en février. La saison des basses eaux se produit de juillet à octobre avec un minimum de 24 m<sup>3</sup>/s au mois d'août. Le débit moyen annuel est de 65.40 m<sup>3</sup>/s. À la station Vic-sur-Aisne (aval de la zone étudiée), les QJ ou débits calculés pour une crue journalière sont : QJ5 = 302 m<sup>3</sup>/s et QJ50 = 500 m<sup>3</sup>/s (Tison, 2007). Ces niveaux sont bien suffisants pour occasionner de sérieux débordements.



Nous effectuons une analyse basée sur le débit QJ50, la référence (Tekatlian, 2001) suggère que le coefficient de variation est de l'ordre de 15%. La loi que nous avons choisie attribuer au débit est la loi normale.

- **Coefficient de frottement de Manning**

La rugosité, représentée le plus souvent par le coefficient de Strickler, est un paramètre à la fois difficile à évaluer et influent sur les résultats de calculs. La pratique montre que pour les modèles 1D, les variations relatives du coefficient de Strickler, en fonction de l'observateur sur le terrain, et des calages des simulations sont d'environ 15% à 40%. Cet écart pouvant notamment varier en fonction de la taille du site et de la résolution spatiale adoptée (nombre de biefs).

Le code Mascaret permet de considérer des coefficients de Strickler différents pour le lit mineur et le lit majeur. Il existe un certain nombre d'approches qui fournissent des ordres de grandeur du coefficient de Strickler en fonction du type de cours d'eau étudié, la plus utilisée étant celle de Pardé (Pardé, 1998), cette référence suggère que:  $ks_{\min} = 35 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$  et  $ks_{\text{maj}} = 12 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$ . Les analyses de fiabilité hydrauliques font le plus souvent appel à la loi normale pour représenter la distribution du coefficient de Strickler (Johnson, 1996; Dun, 2006).

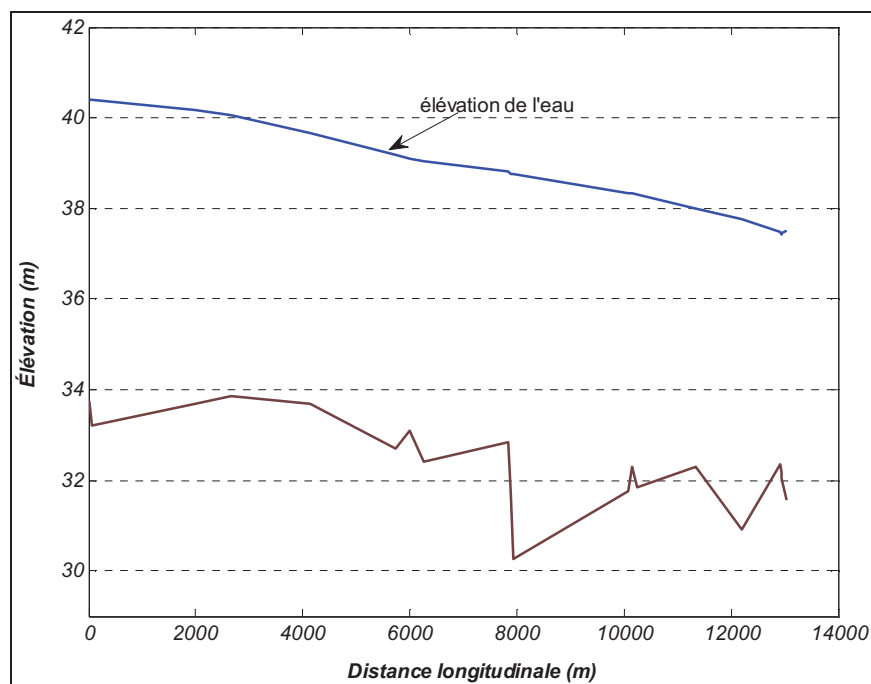
- **Bathymétrie**

Les données bathymétriques ne sont accessibles que par levés terrestres avec ou sans contact. Ces levés sont incontournables lorsque des simulations numériques, 1D ou 2D, sont à effectuer. Des profils en long et en travers sont souvent levés en zone inondable pour servir de contrôle. La précision des levés des données bathymétriques est souvent donnée pour environ 20 cm pour les parties immergées (Tekatlian, 2001).

Tableau 5.1 Tableau récapitulatif des incertitudes des données géométriques  
(Tekatlian, 2001)

Types de données	Nature de l'incertitude (origine)	Écart le plus probable	Écart possible	Écart exceptionnel
levées terrestres (levé en long)	précision	$\pm 5$ à $10$ cm (XY) $\pm 20$ cm (Z)	$\pm 10$ à $20$ cm (XY) $\pm 50$ cm (Z)	$\pm 50$ cm (XY) $\pm 70$ cm (Z)
levées terrestres / ouvrages en lit majeur	précision	$\pm 2$ cm (XY, Z)	$\pm 1$ à $5$ cm (XY, Z)	$\pm 10$ cm (XY, Z)
bathymétrie (profil en travers)	précision	$\pm 5$ à $10$ cm (XY) $\pm 20$ cm (Z)	$\pm 10$ à $20$ cm (XY) $\pm 50$ cm (Z)	$\pm 50$ cm (XY) $\pm 100$ cm (Z)

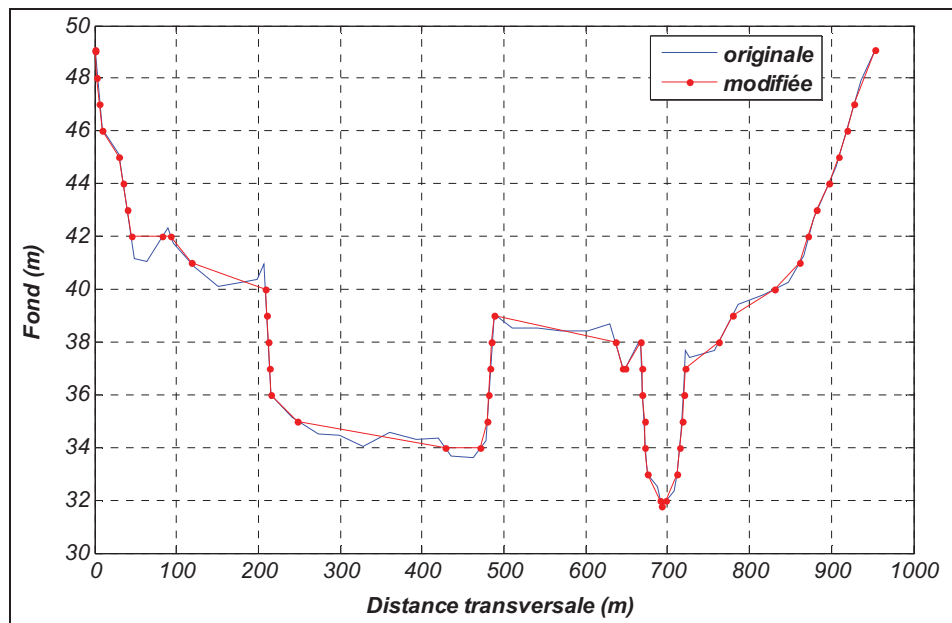
La Figure 5.2 montre le profil en long très irrégulier du fond du bassin étudié:



**Figure 5.2** *Profil longitudinal du fond du bassin étudié.*

Le traitement des données de la bathymétrie peut être facilité si nous retenons que des entiers, les bornes des intervalles de 1 m  $[b_{i-1}, b_i[$ , avec:  $b_i = 31, 32, \dots, 40$  m. Plus

précisément, chaque section en travers est représentée par l'ensemble des segments passant par les niveaux  $b_i$ . Un exemple d'une section en travers modifiée par l'interpolation linéaire est décrit à la Figure 5.3. Les sections modifiées sont utilisées dans les calculs de l'écoulement. L'interpolation linéaire est utilisée afin de faciliter la manipulation de la variable aléatoire de la bathymétrie. Dix iso-niveaux (de 31 à 40 m) sont enfin retenus dans la représentation aléatoire de la bathymétrie de tout le domaine. Nous faisons l'hypothèse que ces variables sont indépendantes et suivent une distribution normale avec un coefficient de variation  $c_v = 1\%$ .



**Figure 5.3** Exemple d'une section originale du bassin et son interpolation linéaire.

Ainsi, outre le débit et les coefficients de Strickler on a dix variables aléatoires représentant les incertitudes sur la bathymétrie, soit au total treize variables aléatoires.

### 5.2.1.2 Mode de défaillance

Nous fixons un seuil  $h_0$  pour la ligne d'eau et nous cherchons à estimer la probabilité de l'événement :  $h_0 \leq g(z)$ , avec  $g(z)$  la côte de la ligne d'eau définie de façons discrète en tout

point du maillage par le code de modélisation hydraulique Mascaret en fonction des distributions aléatoires des données d'entrée.

La fonction d'état limite est définie par :

$$G(z) = h_0 - g(z), \quad z = (z_1, z_2, \dots, z_{13}) \quad (5.1)$$

Nous avons utilisé le régime permanent pour le calcul de la ligne d'eau et nous imposons un débit à l'entrée et un niveau à la sortie. La courbe de tarage (niveau à la sortie en fonction du débit imposé) utilisée dans cette étude est indiquée au Tableau 5.2.

Tableau 5.2 Tarage aval au bassin de l'Aisne

niveau aval (m)	débit (m <sup>3</sup> /s)
35.75	150
36.20	200
37.00	300
38.50	450
39.10	550

Le pas du maillage pris dans cette étude est de 30 m, le maillage consiste à définir la position des sections de calcul dans le bief. Pour affiner le calcul et obtenir une ligne d'eau la plus représentative possible, il est nécessaire de créer des sections de calculs intermédiaires aux profils terrain, les «sections» intermédiaires étant interpolées entre les sections réelles.

Le pas du planimétrage est de 0.334 m, le planimétrage consiste en une discrétisation (découpage en tranche verticale) des profils en travers, le pas de planimétrage correspondant au pas de discrétisation de la relation (côte, section mouillée, rayon hydraulique,...) décrivant chaque profil en travers.

### 5.2.2 Résultats de l'analyse de fiabilité

Nous cherchons l'intervalle de confiance à 95 % de la ligne d'eau, définie par le code hydraulique Mascaret en fonction des distributions aléatoires des variables d'entrée (Tableau 5.3).

Tableau 5.3 Description des variables aléatoires d'entrée

variable		loi de distribution	$\mu$	$\sigma$	$c_v$	min	max
débit QJ50 (m <sup>3</sup> /s)		normale	500	75	15%	300	700
Strickler lit mineur (m <sup>1/3</sup> /s)		normale	35	7	20%	22	48
Strickler lit majeur (m <sup>1/3</sup> /s)		normale	12	4	33%	5	19
bathymétrie (m)	ligne 31	normale	31	0.31	1%	30.5	31.5
	ligne 32	normale	32	0.32	1%	31.5	32.5
	⋮	⋮			⋮		
	ligne 40	normale	40	0.40	1%	39.5	40.5

L'analyse de fiabilité est effectuée à l'aide des méthodes FORM et tirage d'importance (IS). L'approximation FORM est la plus importante car elle détermine l'indice de fiabilité  $\beta$ : le calcul du point de conception nécessite le passage de l'espace des variables physiques aux variables normées, centrées et indépendantes, l'algorithme BFGS est utilisé pour la résolution du problème d'optimisation. Les tolérances de convergence sont  $\varepsilon_H=0.001$  et  $\varepsilon_u=0.01$  pour l'algorithme BFGS et  $c_v \leq 0.1$  (coefficient de variation) pour la méthode (IS). Il convient de vérifier les résultats issus de ces méthodes par des calculs de type Monte Carlo (MC).

Nous avons considéré différents point de discrétisation  $x$  pour lesquelles on a obtenu le quantile à 2.5 % (Tableau 5.4).

Tableau 5.4 Intervalle de confiance à 95 % pour la ligne d'eau moyenne

x (m)	$P_f$	FORM	IS	MC
1999.95	0.025	$h_0 \approx 41.88$ m 196 appels à G	$h_0 \approx 41.89$ m 1152 appels à G	$h_0 = 41.80$ m $3 \times 10^4$ appels à G
5728.58	0.025	$h_0 \approx 41.16$ m 182 appels à G	$h_0 \approx 41.17$ m 1724 appels à G	$h_0 = 41.10$ m $3 \times 10^4$ appels à G
7924.72	0.025	$h_0 \approx 40.72$ m 112 appels à G	$h_0 \approx 40.75$ m 1570 appels à G	$h_0 = 40.68$ m $3 \times 10^4$ appels à G
12194.60	0.025	$h_0 \approx 39.92$ m 196 appels à G	$h_0 \approx 39.94$ m 1192 appels à G	$h_0 = 39.89$ m $3 \times 10^4$ appels à G

Cela nous permet de visionner la ligne d'eau moyenne et les lignes d'eau seuil :

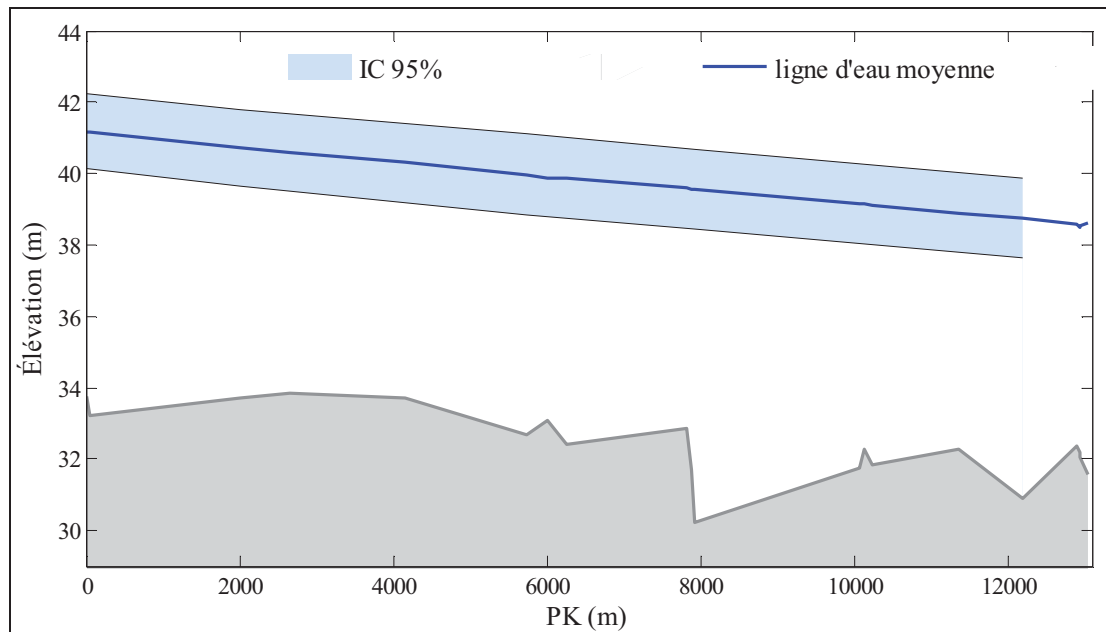


Figure 5.4 La ligne d'eau moyenne et les lignes d'eau seuil (MC).

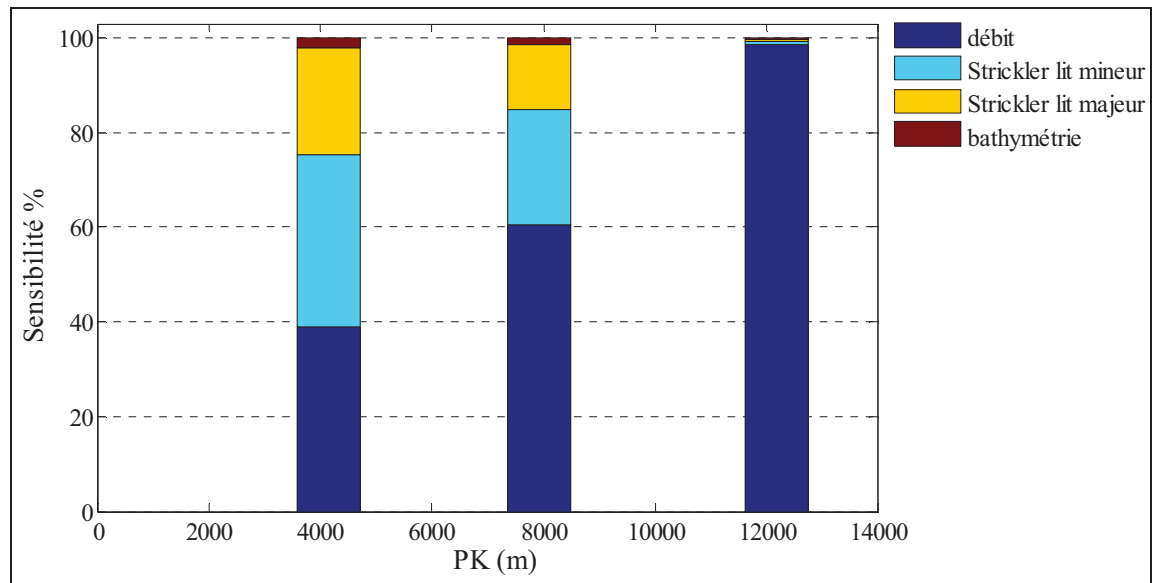
La méthode d'approximation FORM et la méthode IS fournissent de très bons résultats, même avec un nombre important de variables aléatoires (13 variables). Les résultats ont été comparés avec succès aux résultats de MC. Les imprécisions observées correspondent à des

erreurs numériques lors de la recherche du point de conception et à la courbure de la fonction d'état limite en ce point.

Le calcul nécessite un nombre d'évaluations de la fonction d'état limite  $G$ . Ce nombre apparaît comme un bon indicateur de l'efficacité de la méthode. Le Tableau 5.4 montre que la méthode MC est la plus coûteuse ( $3 \times 10^4$  simulations qui ont pris 8h), la méthode d'approximation FORM, même avec un nombre important des variables aléatoires, a un temps d'exécution raisonnable (quelques minutes).

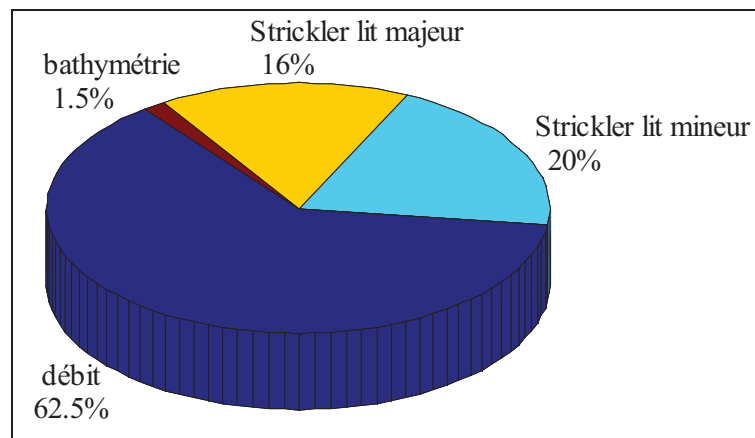
### 5.2.2.1 Analyse de sensibilité

Au regard des bons résultats fournis par la méthode FORM, nous avons choisi de retenir cette approche dans l'analyse de sensibilité. Cette démarche, propre aux études fiabilistes, permettra de calculer l'influence de chaque variable aléatoire sur la probabilité de défaillance.



**Figure 5.5** *Hiérarchisation des sources d'incertitudes (FORM,  $P_f = 0.025$ ).*

La Figure 5.5 présente les poids respectifs des variables considérées sur la probabilité de défaillance en trois points de discrétisation  $x$  (4148 m, 7925 m et 12195 m). Le débit et les coefficients de Strickler jouent un rôle important, suivis dans une moindre mesure par la bathymétrie. Les coefficients de Strickler du lit mineur et du lit majeur semblent avoir beaucoup d'influence au début de l'écoulement, notamment dans la première moitié du site. Cette constatation est en accord avec la réalité, en effet, sans obstacles majeurs dans cette zone on aura moins d'élévation de la ligne d'eau et donc moins d'inondation. Les valeurs moyennes des sensibilités sur tout le tronçon étudié sont présentées sur la Figure 5.6.



**Figure 5.6** Valeurs moyennes des sensibilités (*FORM*,  $P_f = 0.025$ ).

### 5.3 Application au bassin de Saint-Timothée

On s'intéresse dans cette application à l'écoulement dans le bassin de Saint-Timothée afin d'évaluer la fiabilité d'un mur de protection et de comparer les résultats de l'approche fiabiliste, dans laquelle l'impact des incertitudes de chaque variable aléatoire est clairement mis en évidence, avec les résultats de l'approche hydrologique standard basée sur le débit de crues.

Le bassin de Saint-Timothée est situé à près de 40 Km à l'ouest de l'île de Montréal sur le bras nord du fleuve Saint-Laurent. Il mesure près de 3000 m en longueur, et est bordé à l'ouest par l'aménagement de l'Île-Juillet, qui constitue sa frontière amont, et à l'est par



l'aménagement Saint-Timothée constitué d'un évacuateur à dix vannes et de deux digues latérales de fermeture en remblai. Le bassin est bordé, au nord, par l'île aux Vaches et l'île Saveuse qui séparent le bassin Saint-Timothée du canal d'amenée de la centrale Les Cèdres, et au sud, par la localité de Saint-Timothée. Un mur, long de 1200 m et dont la crête s'élève à 36,58 m, protège le village de la montée du niveau dans le bassin. La Figure 5.7 présente un schéma du bassin.



**Figure 5.7** *Vue satellitaire du bassin de Saint-Timothée.*

Le niveau maximal d'exploitation de ce bassin est à l'élévation 35,50 m et correspond à la côte où le bassin est habituellement opéré en été. À la mi-novembre, le bassin de Saint-Timothée est vidangé et les vannes de l'évacuateur sont gardées ouvertes pour toute la période hivernale. En fait, l'aménagement de Saint-Timothée a été construit durant la période 1965 à 1971 pour restaurer le niveau original du fleuve qui prévalait avant le détournement de l'essentiel du débit vers la centrale de Beauharnois.

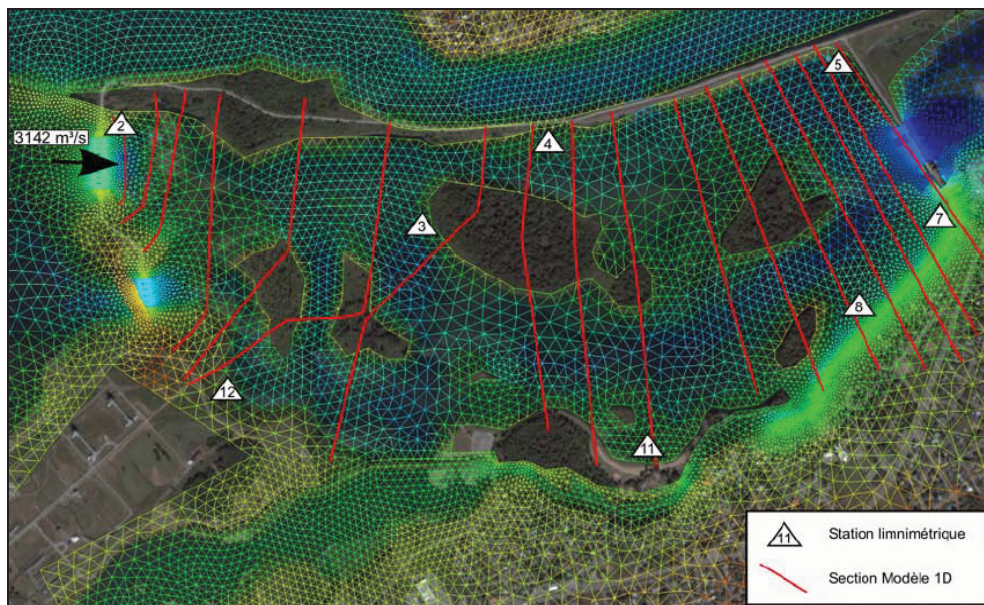
L'aménagement de Saint-Timothée a été conçu pour évacuer un débit de 5150 m<sup>3</sup>/s au niveau 35,36 m à l'amont du mur de protection. Ce débit de conception est plus faible que la capacité actuelle des aménagements Île-Juillet et Coteau situés à l'amont. Cette incohérence entre les

capacités d'évacuation s'explique par le fait que l'aménagement Saint-Timothée a été construit en dernier entre tous les aménagements du bras nord du Saint-Laurent et qu'à sa construction, l'augmentation de la capacité de la centrale de Beauharnois réduisait le besoin de capacité du bras nord. Il se trouve que la valeur du débit de conception utilisée au niveau du lac Saint-François lors de la conception ( $11000 \text{ m}^3/\text{s}$ ) de ces ouvrages est inférieure aux débits de crues ( $12500 \text{ m}^3/\text{s}$  pour la crue centennale et  $14700 \text{ m}^3/\text{s}$  pour la crue décennale) qui devraient être transités de manière sécuritaire par ces aménagements selon la loi du Québec sur la sécurité des barrages. Plusieurs études ont été réalisées ces dernières années à Hydro-Québec pour déterminer de la manière la plus précise le débit maximal qui pourrait être transité par le fleuve en évitant toute inondation majeure. Une fois les hypothèses de fonctionnement et débit faites pour les centrales de Beauharnois et Les Cèdes, cette question revient à celle de la capacité maximale à évacuer par Saint-Timothée sans déborder au dessus du mur de protection du village. Selon les études, les modèles utilisés, ou les paramètres retenus (débit, coefficient de Manning et bathymétrie par exemple), le débit limite se situe entre  $6500$  et  $7000 \text{ m}^3/\text{s}$ .

### **5.3.1 Le modèle numérique du bassin de Saint-Timothée**

#### **5.3.1.1 Description géométrique**

La Figure 5.8 présente le positionnement des sections pour l'étude 1D et du mur de protection (vert étincelant à droite).



**Figure 5.8** *Positionnement des sections pour l'étude 1D et du mur de protection.*

### 5.3.1.2 Condition frontière aval

Nous avons utilisé le régime permanent pour le calcul de la ligne d'eau et nous imposons un débit à l'entrée (barrage Juillet-Nord) et un niveau à la sortie (barrage Saint-Timothée). La courbe de tarage (niveau à la sortie en fonction du débit imposé) utilisée dans cette étude est indiquée au Tableau 5.5.

**Tableau 5.5** Tarage aval au bassin de Saint-Timothée

niveau aval (m)	débit (m <sup>3</sup> /s)
30.11	3400
31.82	6600
32.07	7050
32.09	7180
32.90	9380

### 5.3.2 Variables aléatoire retenues et mode de défaillance

Les sources d'incertitudes retenues dans cette application sont des incertitudes des paramètres hydrologiques (le débit) et hydrauliques (coefficient de frottement de Manning et bathymétrie). L'ensemble des variables aléatoires retenues sont considérées indépendantes *a priori*, dans la mesure où l'on ne dispose pas d'informations expérimentales qui permettrait une estimation cohérente de leur éventuelle corrélation. Il reste donc à préciser leur loi de distribution aléatoire.

- **Débit**

Les valeurs du débit de la crue centennale et la crue décennale sont :  $Q_{100} = 4300 \text{ m}^3/\text{s}$  et  $Q_{10000} = 6500 \text{ m}^3/\text{s}$ . Avec ces valeurs de crue, nous avons déterminé les deux paramètres de la loi de Gumbel E1-max (Wotling et al., 2000) pour ajuster cette distribution au débit.

La loi Gumbel s'écrit :

$$F(z) = \exp\left(-\exp\left(-\frac{z - P_0}{G_d}\right)\right) \quad (5.2)$$

avec :

$P_0$  : Paramètre de position ( $\text{m}^3/\text{s}$ );

$G_d$  : Pente de la droite d'ajustement.

Nous pouvons l'écrire autrement :

$$z_p(T) = -G_d \times \ln(-\ln(1 - 1/T)) + P_0 \quad (5.3)$$

$z_p(T)$  est le quantile de période de retour T.

En posant :

$$Y = -\ln(-\ln(1 - 1/T))$$

L'expression précédente devient :

$$z_p(T) = G_d \times Y + P_0$$

La moyenne et l'écart type sont calculés à partir des relations suivantes :

$$G_d = \sqrt{6} \sigma_Q / \pi \quad \text{et} : \quad P_0 = \mu_Q - 0.5772 \times G_d$$

- **Coefficient de frottement de Manning**

Comme précédemment, on fait appel à la loi normale pour représenter la distribution du coefficient de Manning. La valeur moyenne  $n = 0.04 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}$  provient d'un exercice d'étalonnage réalisé par Hydro-Québec avec une dizaine de points de mesures dispersés dans le bassin. Johnson (Johnson, 1996) et Dun (Dun, 2006) suggèrent que le coefficient de variation du Manning soit de l'ordre de 20 %.

- **Bathymétrie**

On garde la même démarche que dans l'application précédente, la Figure 5.9 montre le profil en long très irrégulier du fond, la longueur du mur de protection et le positionnement du barrage de Saint-Timothée.

Un exemple d'une section en travers modifiée par l'interpolation linéaire est décrit à la Figure 5.10. Douze iso niveaux (de 27 m à 38 m) sont retenus dans la représentation aléatoire de la bathymétrie de tout le domaine. Nous faisons l'hypothèse que les variables aléatoire associées à la bathymétrie sont indépendantes et suivent une distribution normale avec un coefficient de variation  $c_v = 1\%$ .

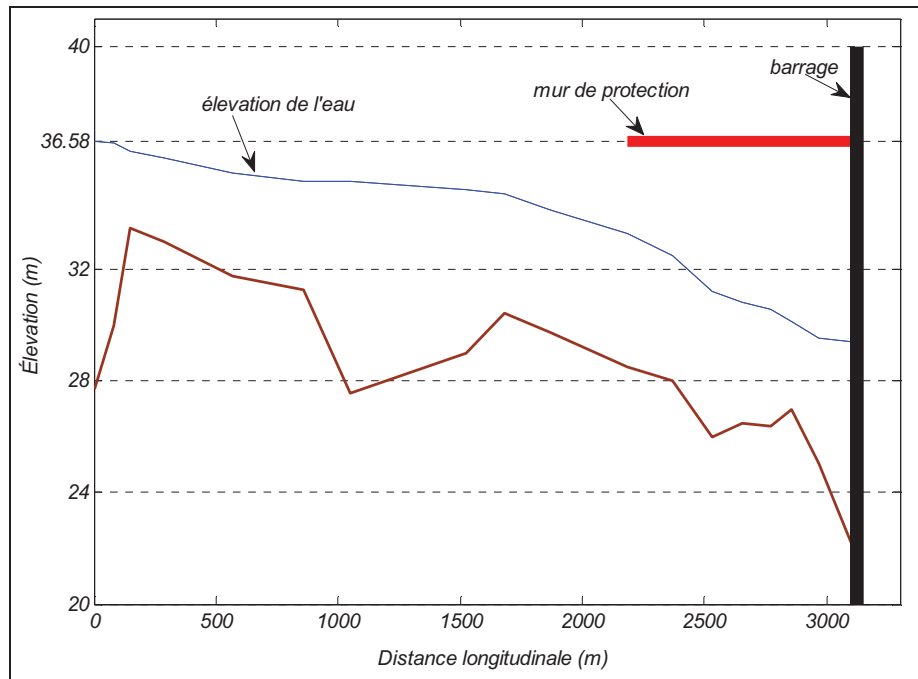


Figure 5.9 Profil longitudinal du fond du bassin de Saint-Timothée.

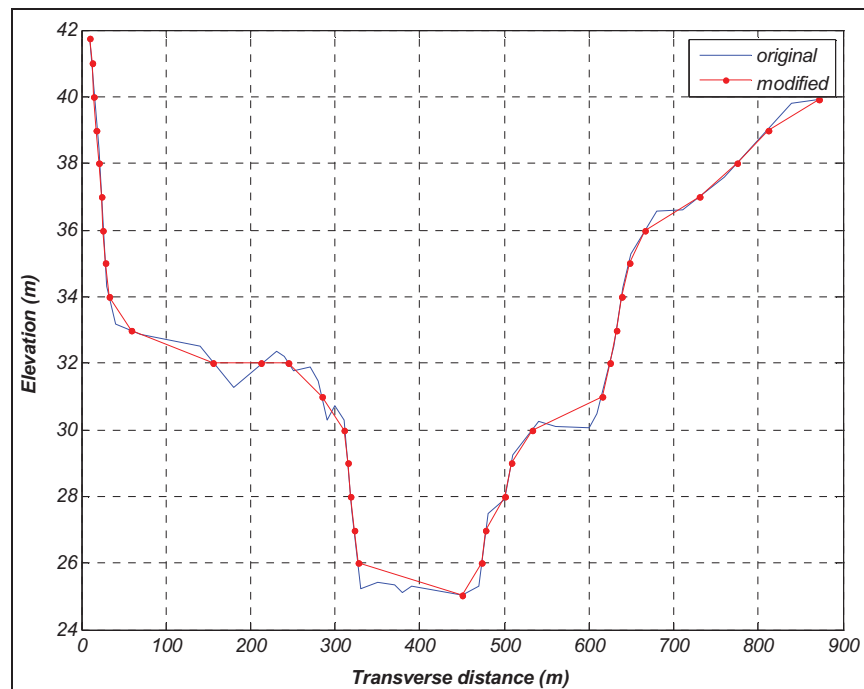


Figure 5.10 Exemple d'une section réelle du bassin et son interpolation linéaire.

Outre le débit et le coefficient de Manning, on a douze variables aléatoires représentant les incertitudes sur la bathymétrie, soit au total quatorze variables aléatoires. Les caractéristiques de ces variables (lois de distribution et paramètres) sont indiquées au Tableau 5.6.

Tableau 5.6 Description des variables aléatoires d'entrée

variable		loi de distribution	$\mu$	$\sigma$	$c_v$
débit ( $\text{m}^3/\text{s}$ )		Gumbel E1-max	2380	600	25%
Manning ( $\text{m}^{-1/3} \text{ s}$ )		normale	0.04	0.008	20%
bathymétrie (m)	ligne 27	normale	27	0.27	1%
	ligne 28	normale	28	0.28	1%
	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
	ligne 38	normale	38	0.38	1%

On s'intéresse à l'étude du risque de surverse au dessus du mur de protection du village de Saint-Timothée. Étant donné que  $h_0$  est le niveau du mur de protection (Figure 5.9), la fonction d'état limite est définie par :

$$G(z) = h_0 - g(z), \quad z = (z_1, z_2, \dots, z_{14}) \quad (5.4)$$

avec  $g(z)$  la côte maximale de la ligne d'eau sur le mur, calculée au point de discrétisation  $x = 2182 \text{ m}$  (11ème section sur la figure 5.8), par le code Mascaret.

### 5.3.3 Résultats de l'analyse de fiabilité

L'analyse de fiabilité est effectuée à l'aide des méthodes FORM et tirage d'importance (IS), puis vérifiée par la simulation Monté Carlo (MC). Nous avons considéré différentes valeurs de la hauteur du mur pour lesquelles on a obtenu les probabilités de défaillance (Tableau



5.7). Les tolérances de convergence sont  $\varepsilon_H = 0.001$  et  $\varepsilon_u = 0.01$  pour l'algorithme BFGS,  $c_v \leq 0.075$  pour la méthode IS et  $c_v \leq 0.1$  pour la simulation MC.

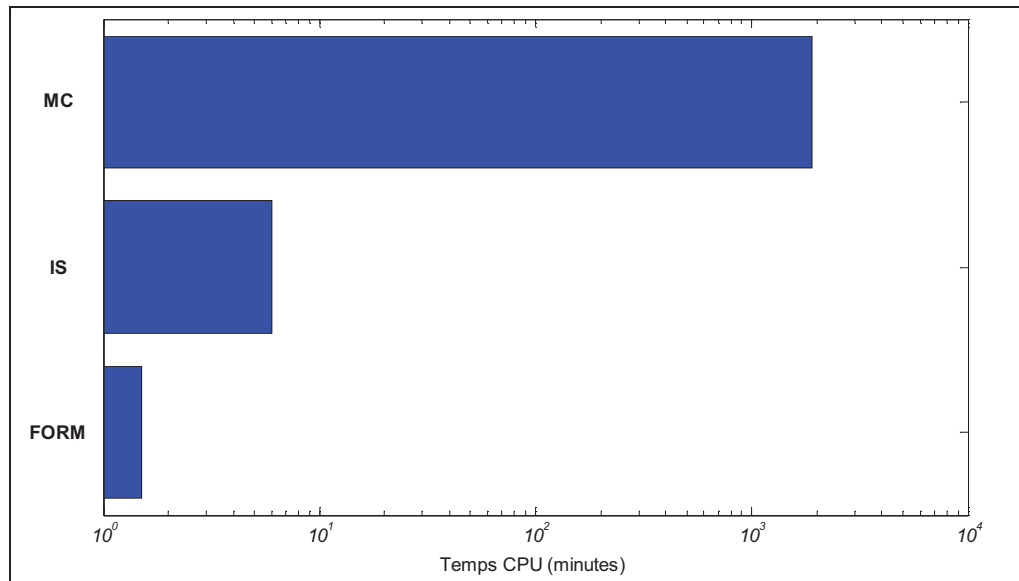
Tableau 5.7 Probabilité de défaillance

$h_0$ (m)	FORM	IS	MC
35.58	$P_f = 1.673 \times 10^{-2}$ 75 appels à G	$P_f = 1.671 \times 10^{-2}$ 563 appels à G	$P_f = 1.740 \times 10^{-2}$ 10342 appels à G
36.00	$P_f = 2.198 \times 10^{-3}$ 90 appels à G	$P_f = 2.171 \times 10^{-3}$ 716 appels à G	$P_f = 2.293 \times 10^{-3}$ 49050 appels à G
36.58	$P_f = 9.377 \times 10^{-5}$ 90 appels à G	$P_f = 9.350 \times 10^{-5}$ 830 appels à G	$P_f = 8.490 \times 10^{-5}$ $2 \times 10^5$ appels à G

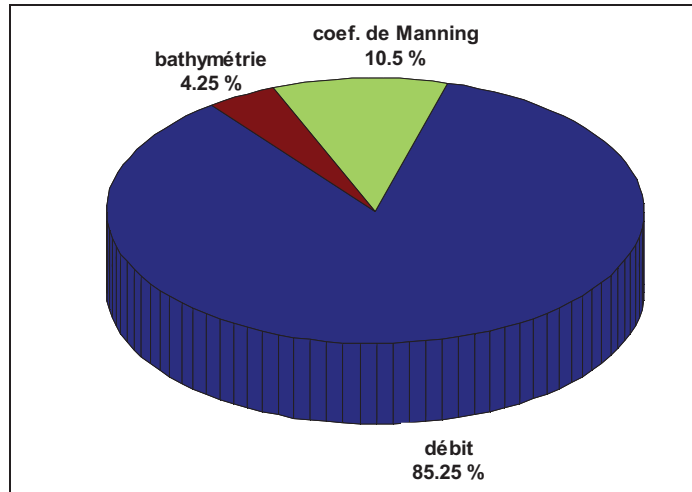
Les méthodes FORM et IS fournissent de très bons résultats avec un minimum d'appels à la fonction d'état limite G, les résultats de la probabilité de défaillance ont été comparés avec succès, les imprécisions observées correspondent à des erreurs numériques lors de la recherche du point de conception  $u^*$  et à la courbure de la fonction d'état limite en ce point. On note également que la méthode de Monté Carlo est imprécise pour la probabilité de l'ordre de  $10^{-5}$  à cause du très grand nombre d'expériences nécessaires ( $\approx 10^7$  simulations).

La Figure 5.11 montre que la méthode de Monté Carlo est la plus coûteuse des méthodes pour la recherche des petites probabilités ( $2 \times 10^5$  simulations qui ont pris 29 heures sur un ordinateur de type Pentium Centrino à 1,8 Gh. et 4 G. de mémoire vive). Les méthodes FORM et IS, même avec un nombre important des variables aléatoires (quatorze variables), ont un temps d'exécution raisonnable (une dizaine de minutes).





**Figure 5.11** *Comparaison du temps CPU consommé en minutes par chaque méthode pour une probabilité  $P_f \approx 10^{-3}$ .*



Cas :  $h_0 = 36.58$  m,  $\beta = 3.735$ ,  $P_f = 9.377 \times 10^{-5}$

**Figure 5.12** *Diagramme des cosinus directeurs.*

La Figure 5.12 présente les poids respectifs des variables introduites à l'exercice de modélisation sur la fiabilité du mur de protection. Comme précédemment, le débit et le coefficient de Manning jouent un rôle important, suivis dans une moindre mesure par la bathymétrie.

Il est intéressant de noter qu'en augmentant la hauteur du mur d'un mètre (passant de 35.58 à 36.58 m) la probabilité de défaillance passe de  $1.7 \times 10^{-2}$  à moins de  $10^{-4}$ . Au vu du niveau de fiabilité du mur de protection et à titre de comparaison, le Tableau 5.8 indique les gammes de valeurs de probabilité de défaillance et de  $\beta$  correspondantes acceptés dans divers secteurs industriels.

Tableau 5.8 Niveaux de probabilité de défaillance acceptés par secteurs industriels (Dehmous, 2007)

Secteur industriel	$P_f$	$\beta$
structures marines	$10^{-2} - 10^{-4}$	2.33 – 3.72
génie civil	$10^{-3} - 10^{-8}$	3.09 – 5.61
aérospatial	$10^{-4} - 10^{-10}$	3.72 – 6.40
composants nucléaires	$10^{-6} - 10^{-12}$	4.75 – 7.20

Au vu du niveau de fiabilité du mur de protection par rapport aux ouvrages de génie civil, il nous a semblé pertinent d'analyser les recommandations classiques d'Hydro-Québec pour le dimensionnement du mur de protection. Cette démarche va nous permettre d'obtenir des informations pertinentes pour la suite de l'analyse de sécurité.

### 5.3.3.1 Critère du dimensionnement

S'appuyant sur les résultats précités, on propose de conclure ce travail en illustrant l'impact des incertitudes sur le dimensionnement du mur de protection. Il est intéressant de comparer un dimensionnement avec des variables d'entrée sans incertitudes (prises égales à leurs valeurs moyennes) et un dimensionnement avec des incertitudes.

- **Analyse fiabiliste**

Toutes les variables sont considérées aléatoires dont les caractéristiques sont indiquées au Tableau 5.9. On cherche le point de conception pour un  $h_0$  fixé.

Tableau 5.9 Modèle avec incertitudes. Point de conception et probabilité de défaillance

débit ( $\text{m}^3/\text{s}$ ) au $u^*$	Manning ( $\text{m}^{-1/3} \text{ s}$ ) au $u^*$	bathymétrie (m)	$h_0$ (m)	$P_f$
$Q^* = 3778.50$	$n^* = 0.04595$	-	35.58	$1.673 \times 10^{-2}$
$Q^* = Q_{100} = 4300$	$n^* = 0.0472$	-	35.86	$4.667 \times 10^{-3}$
$Q^* = 6045$	$n^* = 0.0498$	-	36.58	$9.377 \times 10^{-5}$

- **Analyse basée sur le débit centenaire**

Toutes les autres variables sont constantes et égales à leurs valeurs moyennes.

Tableau 5.10 Analyse hydrologique

débit ( $\text{m}^3/\text{s}$ )	Manning ( $\text{m}^{-1/3} \text{ s}$ )	bathymétrie (m)	$h_0$ (m)
$Q_{100} = 4300$	$n = 0.04$	$z_i = b_i$	35.58
$Q = 5025$	$n = 0.04$	$z_i = b_i$	35.86

**Remarque :**

Selon les recommandations d'Hydro-Québec, la hauteur du mur de protection devrait être près 1 m plus haut que 35.58 m (hauteur trouvée en fonction du débit centenaire  $Q_{100}$ ), ce qui donne  $h_0 = 36.58$  m qui est effectivement la hauteur du mur existant.

Les résultats de l'analyse de fiabilité (Tableau 5.9) indiquent que pour  $h_0 = 35.58$  m, le débit correspondant au débordement (point de conception) est inférieur au débit centenaire. Ceci s'explique par les variations du coefficient de Manning (plus élevé que sa valeur moyenne) et de la bathymétrie. En fait, en considérant le débit centenaire et les autres variables aléatoires on trouve un niveau de  $h_0 \approx 36.58$  m, éventuellement on devrait ajouter 1 m de sécurité pour obtenir  $h_s = 36.86$  m.

Les Tableau 5.9 et 5.10 montrent que les incertitudes provoquent une marge de sous dimensionnement non négligeable (35.58 m au lieu de 35.86 m).

Pour  $h_0 = 36.95$  m la probabilité de dépassement est de l'ordre de  $P_f \approx 1.03 \times 10^{-5}$ . Cela indique qu'on peut adopter un critère de dimensionnement basé sur l'analyse de fiabilité avec une probabilité de défaillance de l'ordre de  $10^{-5}$  à  $10^{-4}$  au lieu d'une marge de 1 m.

Cette comparaison nous montre que les problèmes de fiabilité ne sont pas inéluctables mais peuvent être atténués, voir maîtrisés, de façon rationnelle par une approche probabiliste.

### 5.3.4 Influence de la corrélation

Nous nous sommes penchés sur l'influence de la corrélation entre les variables aléatoires (supposées jusqu'ici indépendantes). Cette éventuelle relation a un impact sur la probabilité de défaillance simulée.

La matrice de corrélation  $\begin{bmatrix} \rho_{ij} \end{bmatrix}$  dont les composantes  $\rho_{ij}$  mesurent la dépendance linéaire entre chaque couple de variables aléatoires  $z_i$  et  $z_j$  de la façon suivante :

$$\rho_{ij} = \rho(z_i, z_j) = \frac{\text{cov}(z_i, z_j)}{\sigma_{z_i} \sigma_{z_j}}, \quad \forall (i, j) \in [1 \dots n]^2 \quad (5.5)$$

où  $\text{cov}(z_i, z_j)$  représente la covariance de ces deux variables aléatoires,  $\sigma_{z_i}$  et  $\sigma_{z_j}$  désignant leur écart type respectif. Chaque composante  $\rho_{ij}$  est un nombre appartenant à l'intervalle  $[-1, +1]$  :

- Si  $\rho_{ij} = 0$ , les variables  $z_i$  et  $z_j$  ne sont pas reliées linéairement entre elles;
- Si  $\rho_{ij} > 0$  (resp.  $\rho_{ij} < 0$ ),  $z_i$  et  $z_j$  ont tendance à varier dans le même sens (resp. dans le sens contraire);
- Lorsque  $|\rho_{ij}| > 0.9$  la liaison linéaire est considérée comme forte.

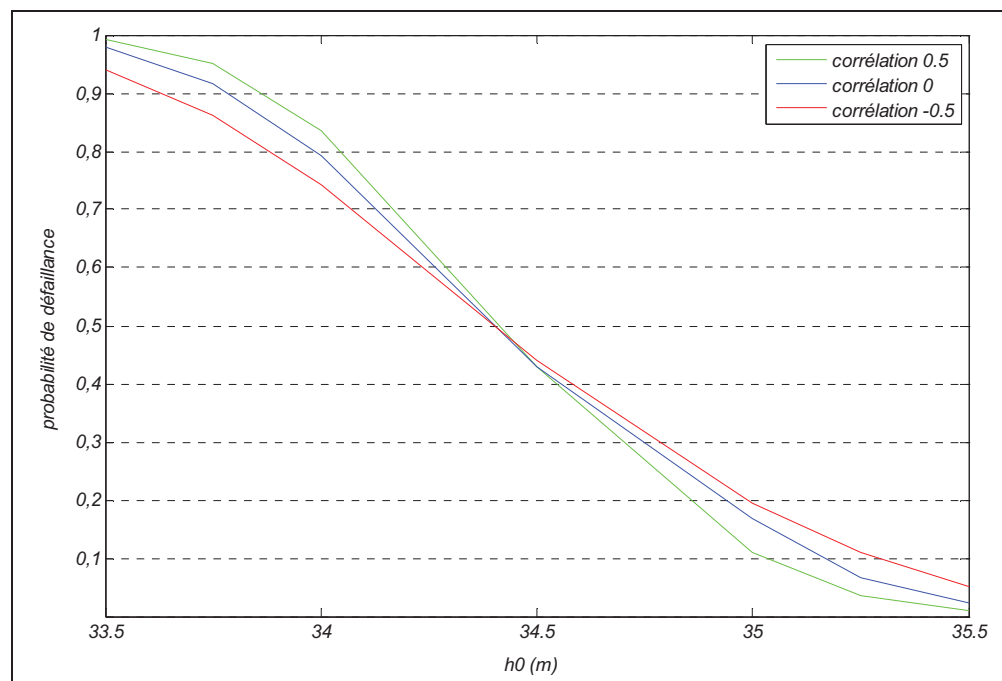
Précisons enfin que pour des variables indépendantes, la matrice de corrélation se réduit à la matrice identité d'ordre  $n$ .

Afin d'en mesurer l'importance, nous avons pris en compte une corrélation linéaire entre deux variables du modèle qui a priori peuvent effectivement être liées, en l'occurrence le débit et le coefficient de frottement de Manning. On peut raisonnablement penser que plus il y a d'incertitudes sur la première variable, plus il y en a sur la seconde.

Nous avons considéré les deux cas de corrélation, à savoir :

$$\rho(Q, n) = \pm 0.5 \quad (5.6)$$

Les autres variables étant laissées indépendantes, on teste cet impact sur la probabilité de défaillance  $P_f$ .



**Figure 5.13** *Influence de la corrélation des variables  $Q$  et  $n$ .*

Il apparaît sur la Figure 5.13 que la corrélation a une importance car les résultats obtenus se distinguent de l'hypothèse supposée jusqu'ici ( $\rho = 0$ ). La corrélation dans le même sens ( $\rho = 0.5$ ) conduisant à une courbe de  $P_f$  d'amplitude plus vaste. Cet exemple simple démontre la nécessité de mesurer la nature de la corrélation entre les variables aléatoires dans la mesure où elle peut modifier sensiblement les résultats obtenus. Il sera par conséquent intéressant de creuser cette question à l'aide d'études expérimentales de façon à préciser son intensité.

#### 5.4 Remarques et perspectives

L'objectif de ce chapitre est d'investiguer une approche d'étude de la propagation des incertitudes des données d'entrée sur les résultats de la simulation en hydrodynamique des rivières. Dans cette approche, on tient compte de l'influence des incertitudes des variables aléatoires hydrologiques (débit) et hydrauliques (coefficient de frottement de Manning et bathymétrie) sur les résultats des simulations numériques. D'autre part, en postulant un critère de défaillance (par exemple : le niveau d'eau dépasse la cote d'une digue de protection) il est possible d'estimer la probabilité d'occurrence de cette défaillance. La difficulté technique essentielle porte sur la mise en place d'un couplage intégrant l'aspect probabiliste (l'algorithme de fiabilité) et la réponse hydraulique du modèle numérique (le code Mascaret) pour l'évaluation de la défaillance. Ce couplage a été réalisé et validé. Les résultats de fiabilité issus des méthodes FORM et tirage d'importance ont été comparés avec succès aux résultats de la méthode de Monté Carlo. L'analyse de sensibilité a également apporté un éclairage sur l'importance de certaines variables aléatoires sur la fiabilité.

Grâce à cette analyse, il a été montré que la prise en compte des incertitudes sur les variables hydrauliques peuvent révéler des scénarios de défaillance non prévus par l'approche classique basée uniquement sur les débits extrêmes. L'approche fiabiliste constitue donc une valeur ajoutée aux analyses hydrodynamiques en vue d'une conception optimale et sécuritaire. Par contre pour une meilleure utilisation, des informations supplémentaires sur les distributions probabilistes des données d'entrée ainsi que leurs corrélations sont requises.

## CONCLUSION

L'objectif principal de cette recherche était d'apporter une contribution à la réalisation du couplage entre les méthodes fiabilistes et les calculs aux éléments finis ou volumes finis dans le cas d'une modélisation hydrodynamique.

La première étape du travail a été de rechercher les méthodes fiabilistes existantes. Nous avons ensuite comparé les différentes stratégies et sélectionné celles les plus performantes en termes de temps de calcul et de précision. Nous nous sommes particulièrement intéressés aux méthodes basées sur l'indice de fiabilité, ces méthodes facilitent la diffusion des approches probabilistes dans les études hydrauliques. En effet celles-ci, outre les temps de calcul raisonnables qu'elles mobilisent, permettent de mesurer l'influence des variables aléatoires sur l'indice de fiabilité.

La deuxième étape du travail a été de développer un algorithme permettant le couplage entre la méthode fiabiliste et la réponse du modèle hydraulique. La méthode BFGS permet d'utiliser efficacement l'algorithme d'ordre deux de Newton, même si le modèle associé à la fonction d'état limite ne peut être défini qu'avec une certaine précision, ce qui est par exemple le cas pour les modèles non linéaires aux volumes finis. Une procédure intégrée dans l'algorithme de Newton tient compte de la précision numérique du modèle hydraulique pour l'estimation de la matrice hessienne lors de l'estimation des dérivées partielles de la fonction d'état limite par différences finies. Elle permet d'économiser des calculs de la fonction d'état limite. Les résultats obtenus sur le test du canal avec bosse ont bien montré l'intérêt de la méthode proposée: La convergence reste facile et rapide, le point de défaillance est situé à une très bonne proximité de la surface d'état limite, même lorsque la fonction d'état limite présente un comportement fortement non linéaire.

L'étape suivante du mémoire a été d'appliquer les approches probabilistes sur des écoulements réels. Ceci dans le but d'illustrer concrètement notre travail et de montrer ainsi que les nombreux problèmes de dimensionnement des ouvrages hydrauliques ne sont pas inéluctables mais peuvent être atténués, voire maîtrisés, de façon rationnelle par une



approche probabiliste. Cela suppose évidemment de faire évoluer la réglementation de conception actuelle vers ce type d'approche, et c'est aussi dans ce but que nous avons fourni deux études de cas.

Le premier problème a concerné l'estimation de l'intervalle de confiance à 95 % de la ligne d'eau du bassin de l'Aisne. Les résultats de ce couplage sont très encourageants et ouvrent la perspective de leurs applications pour établir les cartes d'inondation correspondantes à des seuils de probabilité de dépassement. L'analyse de sensibilité a également apporté un éclairage sur l'importance de certaines variables aléatoires en modélisation hydrodynamique sur la fiabilité.

Le deuxième problème a porté sur l'estimation de la fiabilité du mur de protection du village de Saint-Timothée. Ce mur de protection dont la hauteur est de 36.58 m a été conçu et dimensionné selon les règles d'Hydro-Québec. L'écoulement au bassin de Saint-Timothée a été modélisé d'une façon qui permette de prendre en compte les incertitudes hydrologiques et hydrauliques. Le couplage de ce modèle avec l'approche probabiliste a mis en évidence l'influence des incertitudes sur le dimensionnement du mur de protection.

La prise en compte des incertitudes représente un concept élargi que nous devons apprendre à gérer. Lors la phase de conception des ouvrages hydrauliques ou l'évaluation des ouvrages existants, les incertitudes entraînent des modifications tant sur le plan technique que sur celui des tâches des acteurs impliqués. Les approches de dimensionnement tenant compte des incertitudes ont certains avantages par rapport aux approches traditionnelles. Elles offrent un nouveau défi aux acteurs participants au projet en leur faisant porter une responsabilité plus importante que jusqu'à présent. Certes, elles nécessitent un surcroît de dépenses, et peuvent sembler à première vue moins concrètes. Mais les avantages deviennent évidents lorsque les procédés de dimensionnement connus actuellement sont comparés avec la méthode probabiliste proposée dans cette étude.

## **Retombés**

L'équipe Hydraulique de l'unité Barrages et Hydraulique d'Hydro-Québec utilise régulièrement, et ce depuis plusieurs années, des logiciels de modélisation hydraulique dans le cadre des études qu'elle réalise. Les simulations réalisées à l'aide de ces modèles comportent diverses incertitudes. J'ai effectué un stage de 4 mois à cette unité. L'objectif premier de ce stage a été d'appliquer les méthodologies développées à l'école de technologie supérieure à un cas de rivière réelle, et d'évaluer l'importance des incertitudes sur les résultats finaux. L'objectif secondaire a été d'aider au transfert technologique, c'est-à-dire le couplage entre les méthodes fiabilistes proposées dans ce mémoire et les logiciels de modélisation hydraulique. Un manuel d'utilisation de l'outil informatique a été produit à l'attention de l'équipe Hydraulique et les résultats ont été présentés au cours du symposium sur les incertitudes en modélisation hydraulique organisé par Hydro-Québec du 15 au 17 octobre 2008.

## **Nos travaux ont fait l'objet des publications suivantes :**

- Fahsi Adil, Azzeddine Soulaïmani et Georges W. Tchamen. 2009. «Application of reliability techniques for the estimation of uncertainties in fluvial hydraulics simulations». Canadian Journal of Civil Engineering. à paraître.
- Fahsi Adil, Azzeddine Soulaïmani et Georges W. Tchamen. 2010. «Propagation des incertitudes en modélisation hydraulique des rivières». Conférence internationale sur les modèles hydrauliques et incertitudes, (Sophia Antipolis, Nice, France. 02 – 04 juin 2010).
- Fahsi Adil, Azzeddine Soulaïmani et Georges W. Tchamen. 2008. «Application des techniques de fiabilité pour la propagation des incertitudes en hydrodynamique des rivières». Symposium international sur les incertitudes en modélisation hydrologique et hydraulique, (Hydro-Québec, Montréal. 15 – 17 octobre 2008).

## ANNEXE 1

### SOURCES D'INCERTITUDES (Tekatlian, 2001)

#### DONNEES GEOMETRIQUES<sup>1</sup>

Types de données	nature des données	Nature de l'incertitude (origine)	Ecart le plus probable (ou précision)	Ecart possible (ou tolérance)	Ecart exceptionnel envisageable <sup>2</sup>	Commentaires
topographiques BD Topo	semis, CDN	Précision (spécifications IGN)	± 1 m (XY) ± 1.5 m (Z)	± 2.7 m (XY) ± 4 m (Z)	± 10 m (XY, Z)	valeurs réglementaires
topogr./ photogrammétrie / aérotriangulation <i>Cas Ec=1/8000<sup>0</sup>(prises de vue)</i>	semis (couples)	Tolérance (arrêté du 21/01/80)	± 0.1 m (XY) ± 0.1 m (Z)	± 0.27 m (XY) ± 0.22 m (Z)	± 0.4 m (XY, Z)	valeurs réglementaires
topogr./ photogrammétrie / restitution <i>Cas Ec=1/8000<sup>0</sup>(prises de vue)</i>	semis, linéaires 3D	Tolérance (arrêté du 21/01/80)	± 0.15 m (XY) ± 0.15 m (Z)	± 0.40 m (XY) ± 0.45 m (Z)	± 0.8 m (XY, Z)	valeurs réglementaires
levés terrestres (levés en long, en travers, canevas de géomètres,...)	semis, linéaires 3D	Précision (arrêté du 21/01/80 et arbitraire)	± 5 à 10 cm (XY) ± 20 cm (Z)	± 10 à 20 cm (XY) ± 50 cm (Z)	± 0.5 m (XY) ± 0.7 m (Z)	proche des valeurs réglementaires
levés terrestres / ouvrages en lit majeur	semis, linéaires 3D	Précision (arrêté du 21/01/80 et arbitraire)	± 2 cm (XY, Z)	± 1 à 5 cm (XY, Z)	± 10 cm (XY, Z)	proche des valeurs réglementaires
bathymétrie / profils en travers ou semis	semis, linéaires 3D	Précision (arrêté du 21/01/80 et arbitraire)	± 5 à 10 cm (XY) ± 20 cm (Z)	± 10 à 20 cm (XY) ± 50 cm (Z)	± 0.5 m (XY) ± 1 m (Z)	proche des valeurs réglementaires
bathymétrie : ouvrages en lit mineur	semis, linéaires 3D	Précision (arrêté du 21/01/80 et arbitraire)	± 2 cm (XY, Z)	± 1 à 5 cm (XY, Z)	± 10 cm (XY, Z)	proche des valeurs réglementaires

<sup>1</sup> Il s'agit de **valeurs interprétées** : si elles sont issues de textes réglementaires, les grandeurs sont exactes pour les précisions et tolérance, alors l'écart exceptionnel correspondant est arbitraire. Sinon, il s'agit de valeurs issues d'enquêtes et de recueils d'expériences.

<sup>2</sup> Il s'agit de **valeurs arbitraires** déterminées de manière subjective en tenant compte des contraintes physiques (site, type de mesure,...) représentant une éventualité réelle maximum. Mais cela ne concerne pas les données manifestement erronées que l'on suppose exclues du jeu de données par le manipulateur avant livraison à l'hydraulicien (erreurs de mesures, perte de l'origine,...)

#### DONNEES HORS GEOMETRIE<sup>1</sup>

Types de données	Nature de l'incertitude (origine)	Ecart le plus probable (ou précision)	Ecart maximum possible	Ecart exceptionnel envisageable <sup>2</sup>	Commentaires
<b>Données hydrologiques</b>					
débits	Erreur relative (expériences a posteriori)	T<30/50 ans : 10 à 20% 30/50<T<100 ans : 30% T>100 ans : >100%	T<30/50 ans : 20% 30/50<T<100 ans : 40% T>100 ans : >100%	T<30/50 ans : 30 à 40% 30/50<T<100 ans : 50%	on peut disposer pour chaque débit d'un intervalle de confiance (incertitude due à la méthode statistique seule)
<b>Données hydrométriques</b>					
hauteurs d'eau	Erreur relative ou précision	capteurs : 5% échelle : 1 à 10 cm	capteurs : 10% échelle : 5 à 20 cm	capteurs : 30% échelle : 20 à 40 cm	Ecart exceptionnel du aux conditions hydrauliques
débits	Erreur relative	hors crues fortes: 5 à 10% crues fortes : 10 à 20%	hors crues fortes: 10% crues fortes : 20 à 30%	50%	Ecart exceptionnel du à l'extrapolation du tarage
<b>Paramètres de calage</b>					
coefficient de Strickler	Erreur relative	15 à 20%	20 à 30%		pas de limite / signification pour l'écart exceptionnel
pertes de charges singulières, lois d'ouvrages	Erreur relative	15 à 20%	20%		pas de limite / signification pour l'écart exceptionnel
laisses de crues	Précision en altimétrie	20 à 30 cm (crues récentes)	30 cm (crues récentes)	30 à 60 cm	

<sup>1</sup> Il s'agit de **valeurs interprétées** : il s'agit de valeurs issues d'enquêtes et de recueils d'expériences, et toujours en ordre de grandeur. En *italiques* : valeurs non consensuelles.

<sup>2</sup> Il s'agit de **valeurs arbitraires** déterminées de manière subjective en tenant compte des contraintes physiques (site, type de mesure, variabilité du phénomène physique,...) représentant une éventualité réelle maximum. Mais cela ne concerne pas les données manifestement erronées que l'on suppose exclues du jeu de données par le manipulateur avant livraison à l'hydraulicien (erreurs de mesures, perte de l'origine,...)

## BIBLIOGRAPHIE

- Bates P. D and M. G., Anderson. 1996. «A preliminary investigation into the impact of initial conditions on flood inundation predictions using a time/space distributed sensitivity analysis ». CATENA, vol. 26, n° 1-2, p. 115-134.
- Bernard, P. and M. Fogli. 1987. «Une méthode de Monte-Carlo performante pour le calcul de la probabilité de ruine». Construction métallique, n° 4, p. 23-39.
- Bjerager , P. 1988. «Probability integration by directional simulation». Journal of Engineering Mechanics, vol. 114, n° 8, p. 1285-1302.
- Box, G.E.P and N.R. Draper. 1987. *Empirical model building and response surface*. John Wiley and Sons, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.
- Breitung, K. 1984. «Asymptotic approximations for multinormal integrals». Journal of Engineering Mechanics Division ASCE, vol. 110, n° 3, p. 357-366.
- Breitung, K. 1994. «Asymptotic approximations for probability integrals». Lecture Notes in Mathematics, n° 1592.
- Breitung, K. and M. Hohenbichler. 1989. «Asymptotic approximations for multivariate integrals with an application to multinormal probabilities». Journal of Multivariate Analysis, Vol. 30, p. 80-97.
- Broyden, C.G. 1970. «The Convergence of a Class of Double-rank Minimization Algorithms». Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications, vol. 6, p. 76-90.
- Bucher, C.G and U. Bourgund. 1990. «A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems». Structural Safety, n° 7, p. 57-66.
- Bucher, C.G. 1988. «Adaptative Sampling : an Iterative Fast Monte Carlo Procedure». Structural Safety, n° 5, p. 119-126.
- Carrier, M. 1987. *Hydraulique générale et appliquée*. Eyrolles, Paris (France), 582 p.
- CETMEF. 2007. «Guide de prise en main Fudaa-Mascaret 2.0». Centre d'Études Techniques Maritimes Et Fluviales. En ligne. 145 p. <<http://rd.edf.com/fichiers>>. Consulté le 19 juin 2009.
- Cornell, A.C. 1971. «First Order uncertainty analysis of soils deformation and stability. Proceedings». First conference on Applications of Statistics and Probability to Soil and Structural Engineering. (Hong Kong, 1971, p. 130-144).

- Cornell, C.A. 1969. «A probability-based structural code» *Journal of the American Concrete Institute*, vol. 66, n° 12.
- De Rocquigny, E. 2005. «Couplage mécano-probabiliste pour la fiabilité des structures – un cas industriel où la robustesse d’une surface de réponse est démontrable». *Actes du 17e Congrès français de mécanique*. (Troyes, 2005).
- De Rocquigny, E., N. Devictor et S. Tarantola. 2008. *Uncertainty in Industrial Practice. A guide to quantitative uncertainty management*, Wiley, 364 p.
- Déak, I. 1980. «Three digits accurate multiple normal probabilities». *Numer. Math.*, vol. 35, p. 369-380.
- Dehmous, H. 2007. «Fiabilité et micromécanique des matériaux composites. Application à la passerelle de Laroin». Thèse de doctorat en génie mécanique, Toulouse, Institut National Polytechnique de Toulouse, 175 p.
- Dennis, J.E., R.B. Schnabel. 1996. «Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations». *Classics in Applied Mathematics SIAM*, p. 168-174.
- Deodatis G. 1991. «Weighted integral method I : stochastic stiffness matrix». *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 117, n° 8, p. 1851-1864.
- Der Kiureghian, A., J. B. Ke. 1988. «The stochastic finite element method in structural reliability». *Prob. Eng. Mech.*, vol. 3, n° 2, p. 83-91.
- Der Kiureghian, A., R.L. Taylor. 1983. «Numerical methods in structural reliability». *Proc. 4th Int. Conf. on Application of Stastics and Probability in Soil and Structural Engineering*, p. 769-784.
- Der Kiureghian, A., T. Dakessian. 1998. «Multiple design point in first and second order reliability». *Structural Safety*, vol. 20, p. 37-49.
- Devictor, N. 1996. «Fiabilité et mécanique : méthodes FORM/SORM et couplages avec des codes d'éléments finis par des surfaces de réponse adaptatives», Thèse de doctorat en génie mécanique, Clermont, Université Blaise Pascal - Clermont II, 206 p.
- Ditlevsen, O. 1981. «Principle of normal tail approximation». *Journal of Engineering Mechanics Division ASCE*, vol. 107, n° 6, p. 1191-1209.
- Ditlevsen, O. and P. Bjerager. 1986. «Methods of structural systems reliability». *Structural Safety*, vol. 3, p. 195-229.
- Dolinski, K. 1983. «First order, second moment approximation in reliability of structural systems: critical review and alternative approach». *Structural Safety*, n° 1, p. 211-231.

- Dun, R.W. 2006. «Reducing uncertainty in the hydraulic analysis of canals». *Water Management*, vol. 159, n° 4, p. 211-224.
- Ellingwood, B.R. 2006. «Structural safety special issue : General-purpose software for structural reliability analysis». *Structural Safety*, vol. 28, p. 1-2.
- El-Tawil, K., J.P. Muzeau and M. Lemaire. 1991. «Reliability method to solve mechanical problems with implicit limit state». In R. Rackwitz and P. Thoft-Christensen, editors, *Reliability and Optimization of Structures*, Proc. Of the 4th IFIP WG 7.5 Conference, p. 181-190. Springer-Verlag.
- Enevoldsen, I., M.H. Faber and J.D. Sorensen. 1994. «Adaptative response surface technique in reliability estimation». In Schueller, Shinozuka, and Yao, editors, *Structural Safety and Reliability*, p. 1257-1264.
- Engelund, S. et R. Rackwitz. 1993. «A benchmark study on importance sampling techniques in structural reliability». *Structural Safety*, vol. 12, p. 255-276.
- Faravelli, L. 1989. «Response surface approach for reliability analysis», *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 115, n° 12, p. 2763-2781.
- Fletcher, R. 1970. «A New Approach to Variable Metric Algorithms». *Computer Journal*, vol. 13, p. 317-322.
- Florès Macias, O and M. Lemaire. 1997. «Éléments finis stochastiques et fiabilité-application en mécanique de la rupture». *Revue Française de Génie Civil*, n° 2.
- Florès Macias, O. 1994. «Modèles fiabilistes et mécaniques : Éléments finis Stochastiques. Méthodes de Couplage et Applications». Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand.
- Freudenthal, A. 1947. «The safety of structures». *Transactions ASCE*. Vol. 112, p. 125-180.
- Ghanem R. and P.D. Spanos. 1991. *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach*. Springer-Verlag.
- Goldfarb, D. 1970. «A Family of Variable Metric Updates Derived by Variational Means». *Mathematics of Computation*, vol. 24, p. 23-26.
- Goutal, N. and F. Maurel. 2002. «A finite volume solver for 1D shallow water equations applied to an actual river». *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 38, p. 1-19.

- Goutal, N., P. Bernardara, E. De Rocquigny and A. Arnaud. 2008. «Uncertainties in 1D flood level modeling : stochastic analysis of upstream discharge and friction parameter influence». Floodrisk final meeting, (Oxford, UK , 30 September - 02 October 2008).
- Hasofer, A. M. et N. C Lind. 1974. «An exact and invariant first order reliability format». Journal of Engineering Mechanics, vol. 100, p. 111-121.
- Haykin, Simon. 1999. *Neural networks*. Prentice Hall International, Londres, 842 p.
- Hisada, T., S. Nakagiri and T. Nakagiri. 1983. «Stochastic finite element analysis of uncertain intrinsic stresses caused by structural misfits». In Trans. 7th SMIRT, M4/7, 1983.
- Horritt M. S. et P. D. Bates. 2002. «Evaluation of 1D and 2D numerical models for predicting river flood inundation». Journal of Hydrology, vol. 268, n° 1-4, p. 87-99.
- Houstache, Renaud. 2006. «Analyse d'images satellitaires d'inondations pour la caractérisation tridimensionnelle de l'aléa et l'aide à la modélisation hydraulique», Thèse de doctorat en Science de l'eau, École Nationale du Génie Rural, des Eaux et Forêts, Montpellier, 216 p.
- ICOLD (International Committee On Large Dams). 1998. «Étude d'onde de rupture de barrage. Synthèse et recommandations». En ligne. Bulletin n° 111. <<http://www.icold-cigb.net/listepublications.aspx#bull>>. Consulté le 19 juin 2009.
- Joannette, J., T. Quach, J. Gagnon and C. Marche. 2001. *Guide des études de rupture de barrage*. «Rapport technique d'Hydro-Québec», Unité Hydraulique et Environnement. Montréal (Qc.) : Hydro-Québec, 125 p.
- Johnson, A. Peggy. 1996. «Uncertainty of hydraulic parameters». Journal of hydraulic engineering, vol. 122, n° 2, p. 112-114.
- Kamamchandani, A., P. Bjerager et C.A Cornell. 1988. «Adaptive Importance Sampling in Reliability and Risk Analysis in Civil Engineering», Proc. of 5th Int. Conf on Structural Safety and Reliability, ICASP'5, Lind (Ed), (University of Waterloo, 1988), p. 930-936.
- Keese, A. 2003. «A review of recent developments in the numerical solution of stochastic partial differential equations (stochastic finite elements)». Institut of Scientific Computing, Technical University Braunschweig, Brunswick.
- Kim, S. H. and S. W. Na. 1997. «Response surface method using vector projected sampling points». Structural Safety, vol. 19, n° 1, p. 3-19.



- Kleiber, M. and T. D. Hien. 1992. *The stochastic finite element method, basic perturbation method techniques and computer implementation*. John Wiley and Sons, Ed.
- Kleijnen, J. P. C. and R. G. Sargent. 2000. «A methodology for fitting and validating metamodels in simulation». *European Journal of Operational Research*, vol. 120, p. 14-29.
- Kreikenbaum, Simon, Vladimir Krejci, Wolfgang Rauch et Luca Rossi. 2002. «Probabilistic Modelling as a New Planning Approach to Storm water Management». *Proceedings of the Ninth International Conference On Urban Drainage, 9ICUD*, editors E.W. Strecker and W.C. Huber. (Portland OR, USA, 8–13th September).
- Lemaire, M. 1998. «Finite elements and reliability : combined methods by response surface». In G.N. Frantziskonis, editor, *Probamat – 21st Century : Probabilities and Materials. Test, Models and Applications for the 21st Century*, volume NATO ASI series 3. High Technology – vol. 46, p. 317-331. *Probamat 21st Century* Nato ARW-960993 and Russian fund of basic research, September 10-12, Kluwer Academic Publishers. ISBN 0-7923-4977-6.
- Lemaire, M., P. Hornet and M. Pendola. 2001. *Fiabilité des structures mécaniques*. Cours IPSI, Edition IPSI.
- Lemaire, Maurice, Alaa Chateaufort and Jean-Claude Mitteau. 2005. *Fiabilité des structures: couplage mécano-fiabiliste statique*. Lavoisier - Hermès, 506 p.
- Lemaire, Maurice. 2008. «Approche probabiliste du dimensionnement – Modélisation de l'incertain et méthode de Monte-Carlo». *Techniques de l'Ingénieur*, BM5003
- Lévi, R. 1949. «Calculs probabilistes de la sécurité des constructions». *Annales des Ponts et Chaussées* 26.
- Madsen, H.O., S. Krenk and N.C. Lind. 1986. *Methods of structural safety*. Dover Publications, 407 p.
- Magne, L. and D. Vasseur. 2006. *Risques industriels, complexité, incertitude et décision: une approche interdisciplinaire*. Lavoisier, 462 p.
- Mayer, M. 1926. *Die Sicherheit der Bauwerke*. Springer Verlag.
- Maynadier, Jérôme. 2003. «Approches statistique et fiabiliste en dynamique des structures». Thèse de doctorat en mathématiques appliquées, Toulouse, Institut National des Sciences Appliquées, 141 p.
- Melchers, R. E. 1989. «Importance sampling in structural systems». *Structural Safety*, vol. 6, p. 3-10.



- Melchers, R. E. 1999. *Structural reliability, analysis and prediction*. John Wiley and Sons Ltd, 437 p.
- Melchers, R.E. 1990. «Radial importance sampling for structural reliability». *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 116, n° 1, p. 189-203.
- Mellah, R. 1999. «Modélisation stochastique par éléments finis en élastoplasticité appliquée à la géomécanique». Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy.
- Merwade, V., F. Olivera, M. Arabi and S. Edleman. 2008. «Uncertainty in flood inundation mapping : current issues and future directions». *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 13, n° 7, p. 608-620.
- Mitteau, J. C. 1995. Discussion on the paper: Less approximations for SORM integrals. In M. Lemaire, J. L. Favre and A. Mébarki, editor *Applications of Statistics and probability*, vol. 3, p. 1529-1531. A. A. Balkema.
- Nakagiri, S. and T. Hisada. 1985. *An introduction to stochastic finite element method*. BaiFuKan, Tokyo, Japan.
- Nikolaidis, E., D. M. Ghiocel et S. Singhal. 2005. *Engineering design reliability handbook*. Boca Rato : CRC Press, Chapter 19, p. 1-23.
- Olivi, L. 1984. «Response surface methodology, Handbook for Nuclear Safety Analysis». J.R.C. European Commission.
- Pellisetti M.F., G.I Schuëller. 2006. «On general purpose software in structural Reliability», *Structural Safety*, vol. 28, p. 3-16.
- Rackwitz, R. 1976. «Practical probabilistic approach to design. First order reliability concepts for design codes». *Bulletin d'information du Comité Européen du Buton*, n° 112.
- Rackwitz, R. et B. Fiessler. 1979. «Structural reliability under combined random load sequences». *Computers and Structures*, vol. 9, p. 489-494.
- Rajashekhar, M. R. and B. R. Ellingwood. 1993. «A new look at the response surface approach for reliability analysis». *Structural Safety*, vol. 12, p. 205-220.
- Riha, D.S., B.H. Thacker, M.P. Enright, L. Huyse and S.H.K. Fitch. 2002. «Recent Advances of the NESSUS Probabilistic Analysis Software for Engineering Applications». *Proc. AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 42nd Structures, Structural Dynamics, and Materials (SDM) Conf., AIAA-2002-1268*. (Denver, CO, April 22-25 2002).

- Roux, Hélène. 2004. «Estimation de paramètres en hydraulique fluviale, à partir de données caractéristiques de l'imagerie aérienne». Thèse de doctorat en Science de la terre et environnement, Institut National Polytechnique de Toulouse, 274 p.
- Rubinstein, Reuven. 1981. *Simulations and the Monte Carlo Method*. John Wiley and Sons Ltd, 278 p.
- Schueller G. I. et al. 1997. «A state-of-the-art report on computational stochastic mechanics». Prob. Engrg. Mech., vol, 12, n° 4, p. 197-321.
- Sellier, A. 1995. «Modélisations probabilistes du comportement de matériaux et structures en Génie Civil». Thèse de doctorat en génie civil, Paris, École Normale Supérieure de Cachan, 252 p.
- Sellier, A. et A. Mébarki. 1993. «Évaluation de la probabilité d'occurrence d'un événement rare par utilisation du tirage d'importance conditionné». Annales des Ponts et chaussées, p. 3-23, juillet 1993.
- Shanno, D. F. 1970. «Conditioning of Quasi-Newton Methods for Function Minimization». Mathematics of Computation, vol. 24, p. 647-656.
- Shinozuka, M. and F. Yamazaki. 1988. *Stochastic finite element analysis : an introduction. In Stochastic structural dynamics, progress in theory and applications*. Elsevier Science publication, pages 241-291.
- Sudret, B. 2005. «Des éléments finis stochastiques spectraux aux surfaces de réponse stochastiques : une approche unifiée». 17e Congrès français de mécanique, Troyes.
- Sudret, B. and A. Der Kiureghian. 2000. *Stochastic Finite Element Methods and Reliability*. A State-of-the-Art Report. Report No.UCB/SEMM-2000/08, Department of Civil & Engineering University of California, Berkeley.
- Sudret, B. and A. Der Kiureghian. 2002. «Comparaison of finite element methods». Prob. Engrg. Mech., vol. 17, p. 337-348.
- Takada, T. 1990. «Weighted integral method in stochastic finite element analysis». Prob. Engrg. Mech., vol, 5, n° 3, p. 146-155.
- Tchamen, G.W. 2006. «L'utilisation des schémas de Riemann pour la solution des équations de Navier Stokes». Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, 180 p.
- Tekatljan, Annick. 2001. *Étude de sensibilité des modélisations 1D – Recensement et quantification des sources d'incertitude externes*. «Rapport technique du Centre d'Études Techniques, Maritimes et Fluviales – Département Chaussées, Pont, Hydraulique», CETE Méditerranée (France), 67 p.

- Tison, C. 2007. *Marché d'assistance à maîtrise d'ouvrage pour la détermination des données hydrologiques au droit des barrages dans le cadre du projet de reconstruction des barrages des bassins de l'Aisne et de la Meuse et de leur équipement en microcentrales, Etude relative au bassin versant de l'Aisne*. «Rapport technique de Voies Navigables de France», BCEOM - HEN 60764Z. Béthune 62408, 105 p.
- Tung, Yeou-koung and Ben-Chie Yen. 2005. *Hydrosystems engineering uncertainty analysis*. Mc Graw-Hill, 280 p.
- Tvedt, L. 1989. «Second order reliability by an exact integral». Lecture Notes in Engineering, n° 48, p. 377-384.
- Weber, J. and A. Menéndez. 2004. «Performance of lateral velocity distribution models for compound channel sections». Actes de colloque, River Flow 2004, Second International conference on Fluvial Hydraulics, Naples, Vol. 1, pp. 449–457.
- Werner M. G. F., N. M. Hunter and P. D. Bates. 2005. «Identifiability of distributed floodplain roughness values in flood extent estimation». Journal of Hydrology, vol. 314, n° 1-4, p. 139-157.
- Wolting, G., C. Bouvier, J. Danloux, J.M. Fritsh. 2000. « Regionalization of extreme precipitation distribution using the principal components of the topographical environment ». Journal of Hydrology, vol. 233, p. 86-101.
- Yamazaki, F., M. Shinozuka and G. Dasgupta G. 1988. «Neumann expansion for stochastic finite element analysis». Journal of Engineering Mechanics, vol. 114, n° 8, p. 1335-1354.